Замечание. **Это alpha-версия.**
Есть опечатки в логике решения.

Контрольные и тесты по теории вероятностей

Л. С. Пономаренко

2015 г.

Оглавление

Введение

Данное учебное пособие написано для студентов второго курса факультета ВМК. Кратко изложен необходимый для решения задач теоретический материал, который иллюстрируется примерами. Предлагается несколько типовых вариантов контрольных работ по следующим темам: основные вероятностные модели и свойства вероятностей, распределения и числовые характеристики распределений случайных величин, производящие и характеристические функции, сходимость последовательностей случайных величин и предельные теоремы. Один вариант по каждой теме приведен с подробными решениями, к остальным прилагаются ответы. Пособие содержит также тесты для проверки усвоения студентами теоретического материала. Кроме того, в пособии приводятся типовые варианты письменного коллоквиума, который проводится в третьем семестре.

Глава 1

Основные вероятностные модели. Свойства вероятностей

В этом разделе разбирается решение задач на применение классической вероятности, геометрической вероятности, условной вероятности, схемы независимых испытаний с двумя и более исходами.

1.1 Классическая вероятность

В классической вероятностной модели множество элементарных исходов Ω содержит конечное число исходов $\omega_1, ..., \omega_s$, класс случайных событий $\mathcal{A}$ содержит все подмножества Ω, вероятность произвольного случайного события $A \in \mathcal{A}$ определяется равенством

$$\mathbf{P}(A) = \frac{|A|}{|\Omega|},$$

где $|A|$ обозначает число элеметарных исходов, благоприятных для события A, а общее число всех элементарных исходов $|\Omega|$ равно s. В этой модели все элементарные исходы ω_i имеют одинаковую вероятность, равную $\frac{1}{s}$.

Подсчет вероятностей в классической модели использует формулы комбинаторики. Рассмотрим наиболее часто встречающиеся схемы.

1.1.1 Схема выбора без возвращения

Допустим, что некоторая урна содержит одинаковые по величине, но различные по цвету шары, из которых M шаров белые, а остальные $N - M$ — красные. Из урны случайным образом извлекают n шаров (можно считать, что одновременно). Вычислим вероятность наступления события A_k — среди вынутых шаров белых окажется ровно k, где

$$k \leq \min(n, M),\ n - k \leq N - M.$$

Для этого занумеруем все шары в урне числами от 1 до N. В качестве элементарного исхода ω рассмотрим неупорядоченный набор чисел

$$\{i_1, i_2, \ldots, i_n\},$$

состоящий из номеров вынутых шаров, причем среди этих номеров нет повторяющихся.

Общее число возможных исходов данного эксперимента равно числу различных способов выбора n различных чисел из N чисел без учета порядка внутри выборки:

$$|\Omega| = C_N^n.$$

Подсчет числа благоприятных исходов для события A_k должен учитывать как число различных способов выбрать k белых шаров из имеющихся M белых шаров, так и число различных способов выбора $n - k$ красных шаров из общего количества $N - M$ красных шаров:

$$|A_k| = C_M^k \cdot C_{N-M}^{n-k}.$$

Таким образом получаем

$$\mathbf{P}(A_k) = \frac{C_M^k \cdot C_{N-M}^{n-k}}{C_N^n}.$$

Разумеется, эта схема выбора применима не только к шарам, а ко всем ситуациям, когда проводится случайный выбор из совокупностей, в которых элементы различаются по каким – либо признакам.

Пример 1.1. В студеческой группе 15 юношей и 5 девушек. Случайным образом для участия в социологическом опросе отбирается 6 человек. Найдем вероятность того, что в опросе юношей и девушек будет участвовать равное количество.

Обозначим интересующее нас событие A. Общее число исходов равно

$$s = C_{20}^6 \frac{20!}{6!14!} = \frac{15 \cdot 16 \cdot 17 \cdot 18 \cdot 19 \cdot 20}{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2} = 38760.$$

Аналогичным образом вычисляется число благоприятных для события A исходов

$$|A| = C_{15}^3 \cdot C_5^3 = \frac{15!}{3!12!} \cdot \frac{5!}{3!2!} = 455 \cdot 10 = 4550.$$

Таким образом,

$$\mathbf{P}(A) = \frac{C_{15}^3 \cdot C_5^3}{C_{20}^6} = \frac{4550}{38760} \approx 0.117. \qquad \blacksquare$$

Пример 1.2. Из корзины с фруктами, содержащей 5 яблок, 3 груши и 4 апельсина, случайным образом достали 3 фрукта. Какова вероятность, что среди них оказались яблоко, груша и апельсин?

Обозначим данное событие через B. Тогда

$$\mathbf{P}(B) = \frac{C_5^1 \cdot C_3^1 \cdot C_4^1}{C_{12}^3} = \frac{5 \cdot 3 \cdot 4}{110} = \frac{6}{11}. \qquad \blacksquare$$

Пример 1.3. Участник лотереи зачеркивает в купленном билете 6 чисел из 36 и после этого отправляет билет организаторам лотереи. После проведенного розыгрыша определяются 6 выигрышных чисел. Если в присланном билете среди зачеркнутых чисел оказывается три и более выигрышных чисел, то участник лотереи может получить выигрыш, размер которого определяется числом выигрышных чисел. Вычислим вероятность получения какого – либо выигрыша.

Для этого введем следующие события: B — участник получит какой – либо выигрыш, A_i — в билете среди зачеркнутых оказалось ровно i выигрышных чисел, где $i = 3;\ 4;\ 5;\ 6$. Поскольку события A_i не могут наступать одновременно и $B = \bigcup\limits_{i=3}^{6} A_i$, то

$$\mathbf{P}(B) = \sum_{i=3}^{6} \mathbf{P}(A_i).$$

Вычислим вероятности отдельных событий A_i :

$$\mathbf{P}(A_3) = \frac{C_6^3 \cdot C_{30}^3}{C_{36}^6} = \frac{81200}{973896} \approx 0.083376,$$

$$\mathbf{P}(A_4) = \frac{C_6^4 \cdot C_{30}^2}{C_{36}^6} = \frac{1305}{973896} \approx 0.001340,$$

$$\mathbf{P}(A_5) = \frac{C_6^5 \cdot C_{30}^1}{C_{36}^6} = \frac{180}{973896} \approx 0.000185,$$

$$\mathbf{P}(A_6) = \frac{C_6^6 \cdot C_{30}^0}{C_{36}^6} = \frac{1}{973896} \approx 0.000001.$$

Следовательно,

$$\mathbf{P}(B) = 0.084902. \qquad \blacksquare$$

Пример 1.4. Игроку на руки сдается 6 карт из колоды, содержащей 36 карт. Вычислим вероятность события A — у игрока есть хотя бы один козырь.

Поскольку порядок сдачи карт в этом случае не важен, то элементарный исход $\omega = \{i_1, \cdots, i_6\}$ можно ввести как неупорядоченный набор из 6 выбранных карт (предполагаем, что каждой карте соответствует свой номер от 1 до 36). Всего равновероятных исходов будет $|\Omega| = C_{36}^6$. Найдем сначала вероятность события $\overline{A}$ — у игрока нет ни одного козыря:

$$\mathbf{P}(\overline{A}) = \frac{C_{30}^6}{C_{36}^6} = \frac{593775}{973896} \approx 0.6097.$$

Но тогда

$$\mathbf{P}(A) = 1 - \mathbf{P}(\overline{A}) = 0.3903. \qquad \blacksquare$$

Пример 1.5. В колоде 36 карт, игроку на руки сдается 6 карт. Найдем вероятность события A – у игрока присутствуют карты всех мастей. Разберем теперь, как могут карты распределяться по мастям. Возможен вариант, когда имеется 3 карты некоторой масти, а остальные три масти имеют по одному представителю. Обозначим это событие — A_1. Но возможен и другой вариант, когда у каких-то двух мастей по два представителя, а у остальных двух — по одному. Пусть это будет событие A_2. Тогда

$$A = A_1 \cup A_2,$$

причем события A_1 и A_2 не пересекаются. Следовательно,

$$\mathbf{P}(A) = \mathbf{P}(A_1) + \mathbf{P}(A_2).$$

Вычислим число благоприятных исходов для каждого из введенных событий. Так $|A_1| = C_4^1 \cdot C_9^3 \cdot C_9^1 \cdot C_9^1 \cdot C_9^1$, где C_4^1 – число способов выбора масти с тремя представителями, C_9^3 – число способов выбрать этих представителей, C_9^1 – число способов выбрать одного представителя у каждой из оставшихся мастей. Аналогичным образом находим $|A_2| = C_4^2 \cdot C_9^2 \cdot C_9^2 \cdot C_9^1 \cdot C_9^1$. Следовательно,

$$\mathbf{P}(A) = \frac{C_4^1 \cdot C_9^3 \cdot C_9^1 \cdot C_9^1 \cdot C_9^1}{C_{36}^6} + \frac{C_4^2 \cdot C_9^2 \cdot C_9^2 \cdot C_9^1 \cdot C_9^1}{C_{36}^6} \approx 0.449. \qquad \blacksquare$$

1.1.2 Схема выбора с возвращением

Рассмотрим еще одну модель выбора. Пусть по-прежнему в урне находится M белых шаров и $N - M$ красных, но теперь выбор шаров проводится по - другому: после фиксирования цвета выбранного шара вынутый шар снова возвращается в урну и этот процесс повторяется n раз. Снова рассмотрим событие A_k – белый шар появился k раз (теперь $0 \leq k \leq n$. Для вычисления вероятности занумеруем все шары в урне числами от 1 до N. Элементарный исход ω введем на этот раз как упорядоченный набор из n чисел

$$\omega = (i_1, i_2, \ldots, i_n),$$

но на этот раз среди чисел $i_1, \ldots, i_n$ могут быть равные. Поскольку каждый раз может быть вынут любой шар из имеющихся, то

$$|\Omega| = N^n,$$

причем при таком подсчете учитывается порядок внутри выборки. Этот факт мы также должны учесть при подсчете числа благоприятных для события A_k исходов. Благоприятные исходы отличаются один от другого не только номерами вынутых белых и вынутых красных шаров, но и номерами испытаний, в которых появился белый шар (соответствено и номерами испытаний, в которых появился красный шар). Число способов выбрать такие испытания равно C_n^k. Каждый раз, когда выбирается белый шар, возможных вариантов для этого M, следовательно, всего способов выбирать белые шары – M^k. Аналогичными рассуждениями получим, что число способов выбирать красные шары равно $(N-M)^{n-k}$. Таким образом, число благоприятных исходов для A_k равно $C_n^k \cdot M^k \cdot (N-M)^{n-k}$, а вероятность данного события равна

$$\mathbf{P}(A_k) = \frac{C_n^k \cdot M^k \cdot (N-M)^{n-k}}{N^n} = C_n^k \left(\frac{M}{N}\right)^k \left(\frac{N-M}{N}\right)^{n-k}, \qquad (1.1)$$

где $\frac{M}{N}$ и $\frac{N-M}{N}$ — доли белых и красных шаров, находящихся в урне. Заметим, что при выборе с возвращением эти доли не меняются, оставаясь одинаковыми при каждом выборе. ■

Проведенные рассуждения легко обобщаются на случай, когда в урне находятся шары нескольких цветов (более двух).

Пример 1.6. Рассмотрим урну, в которой находится 3 белых, 5 красных и 4 зеленых шара. С возвращением отбирается 6 шаров. Вычислим вероятность того, что шар каждого цвета появится дважды. Обозначим данное случайное события A. Всего элементарных исходов

$$|\Omega| = 12^6,$$

а число благоприятных исходов равно

$$|A| = C_6^2 \cdot C_4^2 \cdot C_2^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 4^2.$$

Произведение сочетаний в данной формуле учитывает различные варианты выбора номеров испытаний, в которых появлялись белые, красные и зеленые шары. Это произведение приводится к виду

$$C_6^2 \cdot C_4^2 \cdot C_2^2 = \frac{6!}{2!\,2!\,2!}.$$

Следовательно,

$$\mathbf{P}(A) = \frac{6!}{2!\,2!\,2!}\left(\frac{3}{12}\right)^2\left(\frac{5}{12}\right)^2\left(\frac{4}{12}\right)^2 \approx 0.1085. \qquad \blacksquare$$

1.1.3 Схема размещения шаров по ячейкам

Рассмотрим сначала случай различимых шаров.

Пусть r таких шаров (например, отмеченных номерами от 1 до r) размещаются по n ячейкам, все возможные размещения равновероятны. Тогда возможных размещений n^r, причем размещения отличаются одно от другого как количеством шаров в каждой ячейке, так и номерами шаров, находящихся в каждой из ячеек. Разберем несколько примеров.

Пример 1.7. Для частных значений параметров $n = 3,\ r = 4$ вычислим вероятность события A — нет пустых ячеек.

Всего элементарных исходов $|\Omega| = 3^4 = 81$. Подсчитаем теперь число благоприятных исходов для события A. Если нет пустых ячеек, то в одной из ячеек должно быть два шара, а в остальных двух по одному шару. Благоприятные исходы отличаются друг от друга номером ячейки, в которой будет 2 шара, номерами этих двух шаров, а также номерами шаров в двух остальных ячейках. Таким образом, $|A| = 3 \cdot C_4^2 \cdot 2 \cdot 1 = 36$, а вероятность $\mathbf{P}(A) = 4/9$. $\blacksquare$

Пример 1.8. В лифт, находящийся на цокольном этаже, вошли 7 человек. Лифт может остановиться на первом, втором, и так далее до седьмого этажах. Найдем вероятность события A — лифт сделает остановку на каждом этаже.

Всего элементарных исходов $|\Omega| = 7^7$, а благоприятных $|A| = 7!$. Следовательно,

$$\mathbf{P}(A) = \frac{7!}{7^7} \approx 0.00612. \qquad \blacksquare$$

Если шары неразличимы, то при построении модели надо понимать прежде всего, какие исходы равновероятны. Если по-прежнему равновероятны n^r исходов, то при подсчете числа элементарных исходов мы можем исходы мысленно перенумеровать и использовать первую модель. Но так можно сделать не всегда. В статистической физике возникают задачи, связанные с распределением элементарных частиц по ячейкам фазового пространства, и, оказывается, что рассмотренная выше модель не может быть применима ни к одной из известных частиц. Более того, для различных частиц используются различные вероятностные модели. [1]

Рассмотрим модель размещения неразличимых частиц, которую применяют при размещении фотонов, атомных ядер и атомов, содержащих четное число элементарных частиц, по различным областям фазового пространства.

Пример 1.9. Пусть теперь шары неразличимы, исходы отличаются один от другого только числом шаров в каждой из ячеек и все возможные исходы равновероятны. Разберем случай $n = 3,\ r = 4$ и найдем вероятность события A — нет пустых ячеек. Элементарный исход можно ввести как цепочку

$$|\,0\,0\,|\,|\,0\,0\,|,$$

где две ближайшие вертикальные черты образуют ячейку, а 0 – шар. Приведем еще возможные исходы

$$|\,|\,0\,0\,0\,|\,0\,|,$$

$$|\,0\,|\,0\,|\,0\,0\,|.$$

Первый исход соответствует размещению, при котором вторая ячейка пустая, в двух других по 2 шара, во втором размещении пустой оказалась первая ячейка, во второй – 3 шара, в третьей – 1 шар. Третий исход соответствует тому, что в первых двух ячейках по одному шару, а в третьей 2 шара. При подсчете общего числа исходов учтем, что для всех исходов первая и последняя перегородки своих мест не меняют, а вот 2 внутренние перегородки и 4 нуля могут располагаться на 6 местах произвольным образом. Число различных способов расположить нули и перегородки и дает общее число элементарных исходов. Следовательно, $|\Omega| = C_6^2 = C_6^4 = 15$. Число благоприятных исходов для события A — нет пустых ячеек, равно $|A| = 3$, поскольку благоприятные исходы отличаются лишь номером ячейки, содержащей два шара. Следовательно, $\mathbf{P}(A) = 3/15 = 1/5$.

[1] Подробнее о различных схемах размещения частиц по ячейкам можно прочитать в главе 2,параграфе 5 учебника В. Феллера[1]

В общем случае размещения r неразличимых шаров по n ячейкам

$$|\Omega| = C^r_{r+n-1} = C^{n-1}_{n+r-1}. \qquad \blacksquare$$

1.1.4 Перестановки

Рассмотрим ещу одну часто используемую в задачах модель — перестановки. Если имеется n различных чисел, скажем, от 1 до n, то различных способов расстановки этих чисел $n!$.

Пример 1.10. Десять человек случайным образом выстраиваются в шеренгу. Найдем вероятности следующих событий: события A — Петя и Ваня, а также Маша и Оля будут стоять рядом; события B — Петя и Ваня стоят рядом, а Маша и Оля не окажутся рядом.

Всего элементарных исходов $|\Omega| = 10!$. Для вычисления числа благоприятных для A исходов будем считать пары Ваня – Петя и Маша – Оля отдельными элементами перестановки из 8 элементов, а также учтем возможные перестановки внутри каждой из этих пар. Тогда $|A| = 8! \cdot 2 \cdot 2$,

$$\mathbf{P}(A) = \frac{8! \cdot 4}{10!} = \frac{2}{45}.$$

Число благоприятных исходов для события B найдем как разность между числом всех исходов, когда Петя и Ваня стоят рядом, и числом исходов, благоприятных для события A :

$$|B| = 9! \cdot 2 - 8! \cdot 4 = 8! \cdot 14.$$

Следовательно,

$$\mathbf{P}(B) = \frac{8! \cdot 14}{10!} = \frac{7}{45}.$$

Видим, что событие B в среднем будет происходить в 3.5 раза чаще, чем событие A. $\blacksquare$

Пример 1.11. Карточки, на которых записаны буквы М,А,Т,Е,М,А,Т,И, К,А, перемешали и разложили в случайном порядке. Вычислим вероятность события A,состоящего в том, что сложится слово "математика".

Здесь, как и в предыдущем примере, $|\Omega| = 10!$. Число благоприятных исходов для события A будем вычислять, учитывая, сколькими способами можно поставить букву на каждое место: $|A| = 2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 = 2! \cdot 3! \cdot 2! = 24$. К такому же результату мы бы пришли, рассуждая подругому: учтем, что две буквы М можно переставлять 2! способами, 3 буквы А можно переставлять 3! способами, две буквы Т — 2! способами, а остальные буквы единственным способом, поскольку их по одной. Окончательно получаем

$$\mathbf{P}(A) = \frac{24}{10!} \approx 0.000007. \qquad \blacksquare$$

1.1.5 Вероятность объединения случайных событий

Часто, чтобы вычислить вероятность интересующего нас события, это событие необходимо представить в виде объединения нескольких более простых событий. Из аксиом в определении вероятности следует, что для попарно несовместных событий вероятность объединения равна сумме вероятностей. В рассмотреных выше примерах мы применяли это свойство вероятности. Разберем еще один пример, в котором интересующее нас событие представляется в виде объединения более простых событий.

Пример 1.12. Пять статей разных авторов случайным образом разложены по четырем папкам. Найдем вероятность того, что ровно одна папка окажется пустой (обозначим данное событие A).

Для решения этой задачи воспользуемся схемой размещения различимых частиц по ячейкам ($r = 5,\ n = 4$). Всего исходов $|\Omega| = 4^5 = 1024$. Для вычисления числа благоприятных исходов события A разобьем его на две части

$$A = A_1 \cup A_2,$$

где A_1 — событие, состояшее в том, что 1 папка пустая, 1 содержит 3 статьи, а в остальных двух по одной статье, A_2 — 1 папка пустая, 2 папки содержат по две статьи, в оставшейся папке 1 статья. Других вариантов размещений с одной пустой папкой нет. Поскольку события A_1 и A_2 не могут наступить одновременно, то

$$\mathbf{P}(A) = \mathbf{P}(A_1 \cup A_2) = \mathbf{P}(A_1) + \mathbf{P}(A_2).$$

Для подсчета числа благоприятных исходов этих событий будем учитывать, чем благоприятные исходы отличаются одтн от другого. Так

$$|A_1| = 4 \cdot 3 \cdot C_5^3 \cdot 2! = 240,$$

причем 4 — это число способов выбрать пустую папку, 3—число способов из оставшихся трех папок выбрать ту, в которой находится 3 статьи, C_5^3 — число способов выбрать эти статьи, и, наконец, 2! — число способов разместить последние две статьи по двум оставшимся папкам.

Таким образом получаем

$$\mathbf{P}(A_1) = \frac{240}{1024} \approx 0.2344.$$

Аналогичным образом вычисляем число благоприятных исходов для второго события:

$$|A_2| = 4 \cdot C_3^2 \cdot C_5^2 \cdot C_3^2 \cdot 1 = 360,$$

где 4 — по-прежнему число способов выбрать пустую папку, C_3^2 — число способов из трех оставшихся папок выбрать две, в которых будет по две статьи, C_5^2 — число различных способов выбора двух статей, помещенных в первую из папок, C_3^2 — число вариантов выбора из оставшихся статей еще двух статей во вторую папку, и послеэтого одну оставшуюся статью поместить в последнюю папку. Следовательно,

$$\mathbf{P}(A_2) = \frac{360}{1024} \approx 0.3516.$$

$$\mathbf{P}(A) = 0.2344 + 0.3516 = 0.586.$$

Пример 1.13. Секретарь, написав 10 писем и подписав 10 конвертов, разложила письма по конвертам в случайном порядке. Вычислим вероятность события A — хотя бы одно из писем попадет своему адресату. Представим событие A в виде

$$A = \bigcup_{i=1}^{10} A_i,$$

где событие A_i состоит в том, что i- ому адресату попало нужное письмо. Введенные события могут наступать одновременно. В таких случаях надо применять известную формулу для вероятности объединения случайных событий [2]

$$\mathbf{P}\{\bigcup_{i=1}^{n} A_i\} = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{P}(A_i) - \sum_{1 \le i < j \le n} \mathbf{P}(A_i A_j) + \sum_{1 \le i < j < k \le n} \mathbf{P}(A_i A_j A_k) - \dots +$$
$$+ (-1)^{n-1} \mathbf{P}(A_1 A_2 \dots A_n). \tag{1.2}$$

Для вычисления вероятностей событий A_i и их различных пересечений перенумеруем конверты числами от 1 до 10, а письмам, предназначенным этим адресатам присвоим такой же номер. Тогда элементарный

[2]Вывод этой формулы можно посмотреть в [2], стр. 30–31.

исход $\omega = (i_1, i_2, \cdots, i_{10})$ соответствует тому, что в первый конверт попало письмо с номером i_1 второму — с номером i_2 и т.д. Всего различных исходов $|\Omega| = 10!$, благоприятных для события A_i — $|A_i| = (10-1)! = 9!$, следовательно, $\mathbf{P}(A_i) = 9!/10! = 1/10$. Аналогичным образом вычисляются вероятности

$$\mathbf{P}(A_iA_j) = 8!/10!, \quad \mathbf{P}(A_iA_jA_k) = 7!/10!, \quad \ldots \quad \mathbf{P}(A_1 \ldots A_{10}) = 1/10!.$$

Окончательно, применив формулу (1.2) получаем

$$\mathbf{P}(A) = \mathbf{P}(\bigcup_{i=1}^{10} A_i) = 10 \cdot \frac{1}{10} - C_{10}^2 \cdot \frac{8!}{10!} + \cdots - \frac{1}{10!} =$$

$$1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} - \cdots - \frac{1}{10!} \approx 1 - e^{-1} = 0.632. \qquad \blacksquare$$

1.2 Геометрические вероятности

В геометрической вероятностной модели множетво элементарных исходов — некоторое измеримое множество на прямой (на плоскости, в трехмерном пространстве), имеющее конечную, отличную от 0 длину (площадь, объем). В качестве случайных событий рассматривается σ - алгебра всех измеримых подмножеств Ω, вероятность произвольного случайного события определяется следующим образом

$$\mathbf{P}(A) = \frac{mer(A)}{mer(\Omega)}, \tag{1.3}$$

где $mer(A)$ обозначает соответственно длину (площадь, объем) множества A.

Рассмотрим несколько примеров вычисления геометрических вероятностей.

Пример 1.14. На отрезке AB длины l случайным образом выбирается точка C. Найдем вероятность события A — длины отрезков AC и CB, на которые точка C разделила исходный отрезок, отличаются не более, чем на $l/3$.

В качестве множества элементарных исходов ω выберем отрезок $\Omega = [0; l]$ на числовой прямой. Тогда событие A — это подмножество элементарных исходов $A = \{\omega : |\omega - (l - \omega)| < l/3\}$. Легко убедиться, что для $\omega \in A$ должно выполняться неравенство $l/3 < \omega < 2l/3$. Следовательно, $mer(A) = l/3$, и

$$\mathbf{P}(A) = \frac{l/3}{l} = \frac{1}{3}. \qquad \blacksquare$$

Рис. 1.1: Пример 1.15

Пример 1.15. Пусть теперь на отрезок AB брошены две точки C и D. Эти точки разбивают отрезок на три части. Рассмотрим событие A — длина среднего отрезка меньше $l/3$, и вычислим вероятность данного события.

В этом случае элементарный исход ω введем как точку $\omega = (x; y)$ на координатной плоскости, где x — координата точки C на $[0; l]$, а y — кордината точки D, причем $0 \leq x, y \leq l$. Тогда множество элементарных исходов $\Omega = [0; l] \times [0; l]$ — квадрат со стороною длины l, а событие $A = \{\omega : |x - y| < l/3\}$ — подмножество этого квадрата, изображенное на рисунке 1.1. Теперь $mer(A)$ — это площадь множества A. Легко видеть, что $mer(A) = l^2 - (2l/3)^2 = 5l^2/9$ и, значит,

$$\mathbf{P}(A) = \frac{mer(A)}{mer(\Omega)} = \frac{5}{9}. \qquad \blacksquare$$

1.3 Независимость случайных событий

Одним из ключевых понятий теории вероятностей является понятие независимости случайных событий.

Определение 1.1. Случайные события A и B называются независимыми, если выполняется равенство

$$\mathbf{P}(AB) = \mathbf{P}(A) \cdot \mathbf{P}(B).$$

Если события не являются независимыми, то их называют зависимыми. Отметим несколько важных свойств независимых событий.

1. Случайное событие, вероятность которого равна 0 или 1, не зависит от любого другого событяя, в том числе и от себя.

2. Если события A и B независимы, то независимы также пары событий $\overline{A}$ и B, A и $\overline{B}$, $\overline{A}$ и $\overline{B}$.

3. Если события A и B независимы и их вероятности больше 0, то вероятность пересечения этих событий также больше 0.

Несмотря на простоту приведенного выше определения независимости двух случайных событий, это понятие является более глубоким, чем наши интуитивные представления о независимости. Проиллюстрируем данное замечание следующим примером.

Пример 1.16. Симметричную монету бросают три раза. Рассмотрим случайные события A — в трех бросаниях выпадали и герб и решка, B — выпало более одного герба. Проверим, являются ли эти события независимыми. Для этого выпишем все возможные исходы данного эксперимента:

$$\begin{aligned}&\omega_1 = (1,1,1), \quad \omega_2 = (1,1,0), \quad \omega_3 = (1,0,1), \quad \omega_4 = (0,1,1),\\ &\omega_5 = (1,0,0), \quad \omega_6 = (0,1,0), \quad \omega_7 = (0,0,1), \quad \omega_8 = (0,0,0),\end{aligned}$$

где 1 обозначает появление герба, а 0 — появление решки. Все исходы равновероятны, поэтому

$$\mathbf{P}(A) = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}, \quad \mathbf{P}(B) = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}, \quad \mathbf{P}(AB) = \frac{3}{8} = \mathbf{P}(A) \cdot \mathbf{P}(B).$$

Мы видим, что события A и B независимы. Этот факт не очевиден, тем более, что при четырех бросаниях монеты это не так. ■

Определение 1.2. События $A_1, A_2, \ldots, A_n$ называются взаимно независимыми (независимыми), если для произвольного поднабора событий $A_{i_1}, \ldots, A_{i_k}$, где $2 \le k \le n$, а индексы $i_1, \ldots, i_k$ различны между собой, выполняеется

$$\mathbf{P}(A_{i_1} \cdot \ldots \cdot A_{i_k}) = \mathbf{P}(A_{i_1}) \cdot \ldots \cdot \mathbf{P}(A_{i_k}).$$

Нетрудно подсчитать число условий, требуемых в определении взаимной независимости n случайных событий. Оно равно

$$C_n^2 + C_n^3 + \cdots + C_n^n = 2^n - 1 - n.$$

Сформулируем критерий взаимной независимости n случайных событий. [3]

[3] Часто данный критерий берется в качестве определения взаимной независимости.

Теорема 1.1. *События $A_1, A_2, \dots, A_n$ взаимно независимы тогда и только тогда, когда*

$$\mathbf{P}(\bigcap_{i=1}^{n} A_i^{\delta_i}) = \prod_{i=1}^{n} \mathbf{P}\left(A_i^{\sigma_i}\right),$$

где δ_i, $(0 \le i \le n)$ равны 0 или 1, а

$$A_i^{\delta_i} = \begin{cases} A_i, & \text{если} \quad \delta_i = 1, \\ \overline{A}_i, & \text{если} \quad \delta_i = 0. \end{cases}$$

Приведем основные свойства взаимно независимых событий.

1. Если события $A_1, A_2, \dots, A_n$ — взаимно независимы, то любой поднабор $A_{i_1}, A_{i_2}, \dots, A_{i_k}$ — взаимно независимые события.

2. Если независимые события $A_1, A_2, \dots, A_n$ разбиты на непересекающиеся поднаборы $A_1, A_2, \dots, A_r$ и $A_{r+1}, A_{r+2}, \dots, A_n$, то события B_1 и B_2, определяемые этими поднаборами,[4] будут независимыми.

   Данное свойство справедливо, если события $A_1, A_2, \dots, A_n$ разбиваются на $k\,(k > 2)$ непересекающихся поднаборов, тогда события $B_1, \dots, B_k$, определяемые данными поднаборами, будут взаимно независимыми.

3. Если независимые события имеют ненулевые вероятности, то любые пересечения таких событий непусты и имеют отличные от 0 вероятности.

Пример 1.17. На первых трех этажах здания установлены автоматы, продающие кофе. Вероятность того, что в течение дня в аппарате на i-м этаже закончится кофе, равна p_i, $i = 1, 2, 3$. Найдем вероятность события B — хотя бы на одном из автоматов, расположенных на первом и втором этажах, кофе будет, а на третьем закончится.

Введем случайные события A_1, A_2, A_3 — на первом, втором, третьем этаже закончится кофе. По условию задачи $\mathbf{P}(A_i) = p_i$, и события A_1, A_2, A_3 взаимно независимы. Поскольку $B = (\overline{A}_1 \cup \overline{A}_2) \cap A_3$, то, воспользовавшись свойствами независимых событий, получим

$$\mathbf{P}(B) = \mathbf{P}(\overline{A}_1 \cup \overline{A}_2) \cdot \mathbf{P}(A_3) = (1 - p_1 + 1 - p_2 - (1 - p_1)(1 - p_2))p_3 =$$

$$= (1 - p_1 p_2)p_3. \qquad \blacksquare$$

[4] Это означает, что B_1 и B_2, принадлежат σ- алгебрам, порожденным соответсевующими поднаборами.

1.4 Условные вероятности

С понятием независимости случайных событий тесно связано понятие условной вероятности. Когда о случайном эксперименте имеется дополнительная информация, часто требуется произвести пересчет вероятностей, учитывающий эту дополнительную информацию.

Пример 1.18. Рассмотрим случайный эксперимент, состоящий в подбрасывании игральной кости. Выпадение шестерки возможно с вероятностью 1/6. Допустим известно, что при бросании игральной кости выпало четное число. Тогда фактически множество возможных исходов сокращается до трех, и вероятность выпадения шестерки станет равной 1/3. ■

Пример 1.19. Из урны, содержащей 2 белых и 3 красных шара, по одному без возвращения извлекаются все шары. Вероятность извлечь вторым белый шар равна 2/5. Но если нам известно, что первый извлеченный шар был белым, то вероятность извлечь второй раз белый шар станет равной 1/4. ■

Сформулируем общее определение условной вероятности наступления события A при условии наступления события B. Ее обозначают $\mathbf{P}(A|B)$.

Определение 1.3. Условной вероятностью события A при условии, что произошло событие B, называется

$$\mathbf{P}(A|B) = \frac{\mathbf{P}(AB)}{\mathbf{P}(B)}.$$

Если случайные события независимы и $\mathbf{P}(B) > 0$, то $\mathbf{P}(A) = \mathbf{P}(A|B)$, то есть наступление (или ненаступление) события B не изменяет вероятность наступления события A.

Приведем несколько простых формул, использующихся при решении задач.

Теорема 1.2. Формула умножения вероятностей
Если $\mathbf{P}(A_1A_2\dots A_{n-1}) > 0$, *то*

$$\mathbf{P}(A_1A_2\dots A_n) = \mathbf{P}(A_1)\mathbf{P}(A_2|A_1)\mathbf{P}(A_3|A_1A_2)\cdot\ldots\cdot\mathbf{P}(A_n|A_1A_2\dots A_{n-1}).$$

Теорема 1.3. Формула полной вероятности
Если события $H_1,\dots,H_n$ *образуют разбиение* Ω *и* $\mathbf{P}(H_i) > 0$ $(i = \overline{1,n})$, *то для любого события* A

$$\mathbf{P}(A) = \sum_{i=1}^{n}\mathbf{P}(A|H_i)P(H_i).$$

Теорема 1.4. Формула Байеса
Если дополнительно к условиям предыдущей теоремы выполняется условие $\mathbf{P}(A) > 0$, *то*

$$\mathbf{P}(H_k|A) = \frac{\mathbf{P}(A|H_k)\mathbf{P}(H_k)}{\sum_{i=1}^{n} \mathbf{P}(A|H_i)P(H_i)}.$$

Рассмотрим несколько примеров на применение этих формул.

Пример 1.20. Пусть в урне содержатся 2 белых и 3 красных шара, по одному без возвращения выбирают три шара. Найдем вероятность события B — первым вытащили белый шар, затем — красный, и последним — снова белый. Введем события $A_i\,(i = 1, 2, 3)$ - при i-ом выборе появился белый шар. Тогда $B = A_1\overline{A}_2A_3$. Применив формулу умножения вероятностей, получим

$$\mathbf{P}(B) = \mathbf{P}(A_1)\mathbf{P}(\overline{A}_2|A_1)\mathbf{P}(A_3|A_1\overline{A}_2) = \frac{2}{5}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{3} = \frac{1}{10}. \qquad \blacksquare$$

Пример 1.21. Из урны, с таким же составом, как в предыдущем примере, потерян шар, после чего вынули один шар. Вычислим вероятность того, что он будет белого цвета. Обозначим A — вынут шар белого цвета, H_1 — потерян белый шар, H_2 — потерян красный шар. События H_1, H_2 образуют разбиение Ω и $\mathbf{P}(H_1) = 2/5$, $\mathbf{P}(H_2) = 3/5$. Условные вероятности события по каждой из гипотез легко вычисляются:

$$\mathbf{P}(A|H_1) = \frac{1}{4}, \qquad \mathbf{P}(A|H_2) = \frac{2}{4}.$$

По формуле полной вероятности получаем

$$\mathbf{P}(A) = \mathbf{P}(A|H_1)\mathbf{P}(H_1) + \mathbf{P}(A|H_2)\mathbf{P}(H_2) = \frac{1}{4}\cdot\frac{2}{5} + \frac{2}{4}\cdot\frac{3}{5} = \frac{2}{5}. \qquad \blacksquare$$

Пример 1.22. Допустим, в предыдущем примере после потери шара, вынули белый шар. Найдем вероятность того, что был потерян белый шар:

$$\mathbf{P}(H_1|A) = \frac{\mathbf{P}(A|H_1)\mathbf{P}(H_1)}{\mathbf{P}(A|H_1)\mathbf{P}(H_1) + \mathbf{P}(A|H_2)\mathbf{P}(H_2)} = \frac{2/20}{8/20} = \frac{1}{4}.$$

Аналогичным образом вычиляем

$$\mathbf{P}(H_2|A) = \frac{6/20}{8/20} = \frac{3}{4}.$$

Как видим, вероятности гипотез, вычисленне до опыта (их называют априорными) отличаются от вероятностей тех же гипотез, вычисленных после проведения опыта (от апостериорных). $\blacksquare$

1.5 Схема испытаний Бернулли

В этом разделе рассматривается еще одна часто используемая вероятностная модель. Допустим, что некоторый случайный эксперимент (испытание) проводится n раз, и каждый раз нас интересует только появление (или непоявление) некоторого события, условно называемого успехом. Например, при бросании игральной кости нас интересует только: выпала шестерка или не выпала.

Предположим, что упех при каждом испытании наступает с одной и той же вероятностью p. Тогда неуспех наступает в каждом испытании с вероятностью $q = 1 - p$.

Элементарный исход введем как упорядоченную последовательность

$$\omega = (1,\, 0,\, \ldots,\, 1),$$

состоящую из 1 и 0, где 1 , стоящая на i-ом месте соответствует тому, что в испытании с номером i произошел успех, а 0 — неуспех. Всего элементарных исходов 2^n, но в обшем случае эти исходы не равновероятны. Так в примере с бросанием игральной кости исход $\omega = (0,\, 0,\, \ldots,\, 0)$, состоящий из одних нулей, будет наблюдаться гораздо чаще, чем исход $\omega = (1,\, 1,\, \ldots,\, 1)$, состоящий только из единиц.

В модели повторных независимых испытаний Бернулли вероятность каждого элементарного исхода определяется как произведение вероятностей исходов в отдельных испытаниях. Так в примере с бросанием кости ($p = 1/6,\ q = 5/6$) вероятность исхода, в котором все нули, равна $(5/6)^n$, а вероятность исхода из одних единиц, — $(1/6)^n$. В общем случае

$$\mathbf{P}(\omega) = p^{\text{число единиц}} \cdot q^{\text{число нулей}}.$$

Вероятность произвольного случайного события определяется, как и для всякого дискретного вероятностного пространства, следующим образом:

$$\mathbf{P}(A) = \sum_{\omega \in A} \mathbf{P}(\omega), \qquad \mathbf{P}(\varnothing) = 0.$$

Рассмотрим случайные события $H_k,\ k = 0,\, 1\, \ldots, n$ — в n испытаниях успех осуществился k раз. Поскольку каждый благоприятный для этого события элементарный исход имеет вероятность $\mathbf{P}(\omega) = p^k q^{n-k}$, а всего благоприятных исходов C_n^k, то

$$\mathbf{P}(H_k) = C_n^k p^k q^{n-k}. \tag{1.4}$$

Данная формула называется формулой Бернулли, а вероятности в (2.4)— биномиальными, поскольку являются членами в разложении для $(p+q)^n$.

Пример 1.23. Проведем простой эксперимент, подбросив монету 5 раз. Рассмотрим события: A — герб появился 2 раза, B — более двух раз, C — хотя бы один раз, H_k — k раз ($0 \le k \le 5$).

Для вычисления вероятностей событий H_k применим формулу Бернулли при $n = 5,\ p = 1/2$. Тогда

$$\mathbf{P}(A) = \mathbf{P}(H_2) = C_5^2 \left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{10}{32} = \frac{5}{16},$$

$$\mathbf{P}(B) = \mathbf{P}(\bigcup_{k=2}^{5} H_k) = \sum_{k=2}^{5} \mathbf{P}(H_k) = 1 - \sum_{k=0}^{1} \mathbf{P}(H_k) = 1 - \frac{1}{32} - \frac{5}{32} = \frac{13}{16},$$

$$\mathbf{P}(C) = \sum_{k=1}^{5} \mathbf{P}(H_k) = 1 - \mathbf{P}(H_0) = 1 - \frac{1}{32} = \frac{31}{32}. \qquad \blacksquare$$

Биномиальные вероятности при любых возможных значениях параметров n, p ведут себя одинаково: они возрастают до какого-то номера k, а затем убывают. Обозначим k^* — наиболее вероятное число успехов. Нетрудно убедиться, что

$$np - q \le k^* \le np + p. \tag{1.5}$$

Так в приведенном выше примере наиболее вероятное число гербов удовлетворяет неравенству $2 \le k^* \le 3$. Следовательно, максимальные вероятности имеют события H_2 и H_3 :

$$\mathbf{P}(H_3) = \mathbf{P}(H_2) = \frac{10}{32} = \frac{5}{16}.$$

Вычисление биномиальных вероятностей становится все более трудоемким с увеличением числа испытаний n. Поэтому при больших значениях n (несколько сотен, реально уже при $n \ge 50$) пользуются приближенными формулами.

Первая из них называется формулой Пуассона и используется, когда среднее значение числа успехов np невелико, обычно при $np \le 15$. [5] Приведем эту формулу:

$$\mathbf{P}(H_k) \approx \frac{\lambda^k \cdot e^{-\lambda}}{k!}, \tag{1.6}$$

где $\lambda = np$.

[5] Формулу Пуассона можно использовать и в случаях, когда среднее значение числа неуспехов $nq \le 15$. Вопрос скорее в том, что считать успехом, а что неуспехом.

Пример 1.24. Вероятность появления опечатки на случайно открытой странице книги объемом 200 страниц равна 0.01. Найдем вероятность того, что книга содержит не более 5 опечаток.

Обозначим интересующее нас событие — A. Тогда

$$\mathbf{P}(A) = \sum_{i=0}^{5} \mathbf{P}(H_i) \approx \sum_{i=o}^{5} \frac{2^i e^{-2}}{i!} = 0.987.$$

Для вычисления пуассоновских вероятностей можно воспользоваться таблицами, обычно имеющимися в задачниках по теории вероятностей (см., например, [3]) или отдельно изданными таблицами [4]. ■

В тех случаях, когда значение среднего числа успехов np велико, используют приближенные формулы Муавра–Лапласа. Для вычисления отдельных вероятностей применяется локальная теорема Муавра–Лапласа:

$$\mathbf{P}(H_k) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}} \varphi\left(\frac{k-np}{\sqrt{npq}}\right), \tag{1.7}$$

где

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

— плотность стандартного нормального распределения. Для вычисления значений этой функции также можно воспользоваться таблицами.

Пример 1.25. Найдем приближенное значение вероятности выпадения 50 гербов в 100 бросаниях монеты. Точное значение этой вероятности вычислить весьма затруднительно По локальной формуле Муавра - Лапласа получим с $n = 100$, $p = q = \frac{1}{2}$, $k = 50$

$$\mathbf{P}(H_{50}) \approx \frac{1}{5}\varphi(0) = 0.0799.$$

Отметим, что $k = 50$ — это наиболее вероятное число появлений герба. ■

Обозначим μ_n — число успехов в n испытаниях Бернулли. В тех случаях когда требуется вычислить вероятности событий $\{a \le \mu_n \le b\}$ следует применять интегральную формулу Муавра-Ларласа

$$\mathbf{P}\{a \le \mu_n \le b\} \approx \int_{a_1}^{b_1} \varphi(x)dx, \tag{1.8}$$

где $a_1 = \dfrac{a - np}{\sqrt{npq}}$, а $b_1 = \dfrac{b - np}{\sqrt{npq}}$.

Для вычисления интегралов такого вида можно воспользоваться таблицами значений функции Лапласа

$$\Phi_0(x) = \int\limits_0^{+\infty} \varphi(t)dt$$

(см., например, [3]) или таблицами функции распределения стандартного нормального рапределения

$$\Phi(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} \varphi(t)dt$$

(см. [4]).

Рассмотрим несколько примеров применения интегральной формулы Муавра-Лапласа.

Пример 1.26. Пусть симметричная монета подбрасывается 400 раз, — число выпавших геобов. Найдем приближенное значение вероятности события $\{170 \le \mu_n \le 230\}$. Подсчитаем значения пределов интегрирования в (1.8):

$$a_1 = \frac{a - np}{\sqrt{npq}} = \frac{170 - 200}{10} = -3, \quad b_1 = \frac{b - np}{\sqrt{npq}} = 3.$$

тогда

$$\mathbf{P}\{170 \le \mu_n \le 230\} \approx \int\limits_{-3}^{3} \varphi(t)dt = 2\Phi_0(3) = 2 \cdot 0.4987 = 0.9973. \qquad \blacksquare$$

Пример 1.27. В данном примере ответим на вопрос, сколько надо провести бросаний монеты, чтобы с вероятностью не менее 0.95 отклонения частоты выпадения герба от вероятности данного события не превышали 0.05.

Для этого сначала с помощью интегральной формулы Муавра-Лапласа вычислим приближенное значение вероятности того, что отклонения частоты наступления некоторого события A в n независимых испытаниях отличаются от вероятности $p = \mathbf{P}(A)$ не более, чем на ε. Проведя простые преобразования, получаем

$$\mathbf{P}\{|\frac{\mu_n}{n} - p| \le \varepsilon\} = \mathbf{P}\{np - n\varepsilon \le \mu \le np + n\varepsilon\} \approx \int\limits_{-x}^{x} \varphi(t)dt = 2\Phi_0(x),$$

где $x = \dfrac{\varepsilon\sqrt{n}}{\sqrt{p(1-p)}}$.

Применим полученную формулу к нашему примеру. По таблицам значений функции Лапласа находим $x = 1.96$ — решение уравнения

$$2\Phi_0(x) = 0.95.$$

Учитывая, что $\varepsilon = 0.05$, $p = 0.5$, получим $n \geq 385$. ■

Разберем еще один пример на применение интегральной фрмулы (1.8).

Пример 1.28. Укажем границы, в которых с вероятностью 0.98 заключено число выпавших гербов при 400 бросаниях симметричной монеты. Поскольку эти границы данным условием определяются неоднозначно, то договоримся указать промежуток наименьшей длины. Таким промежутком будет промежуток вида $|\mu_n - np| < \delta$. Чтобы найти δ, решим уравнение

$$\mathbf{P}\{|\mu_n - np| < \delta\} = 0.98.$$

Поскольку из формулы (1.8) следует, что

$$\mathbf{P}\{|\mu_n - np| < \delta\} \approx 2\Phi_0\left(\frac{\delta}{\sqrt{np(1-p)}}\right),$$

то, найдя из таблиц решние уравнения $\Phi_0(x) = 0.49$ $(x = 2,33)$, получим

$$\frac{\delta}{\sqrt{np(1-p)}} = 2.33, \quad \delta = 23.3.$$

Учитывая, что μ_n принимает целые значения, окончательно имеем

$$176 \leq \mu_n \leq 234. \quad ■$$

1.6 Контрольные работы

Вариант 1

1. В урне находятся шары четырех различных цветов: 4 белых, 4 красных, 4 зеленых и 4 желтых. Наудачу отбирают 6 шаров. Найти вероятность того, что среди них окавжутся шары всех цветов.

2. Внутри круга радиуса r случайным образом выбирается точка, являющаяся серединой некоторой хорды. Найти вероятность того, что длина этой хорды больше стороны правильного треугольника, вписанного в данную окружность.

3. Из 15 лотереных билетов 3 выигрышных. При подготовке вечера 2 билета потеряли и добавили еще 2 выигрышных. Какой стала вероятность вытянуть выигрышный билет?

4. Случайные события $A_1, \ldots, A_5$ взаимно независимы, вероятность каждого из них равна 0.3. Найти вероятность события $B = A_1A_2 \cup A_3 \cup A_4A_5$.

5. Испытание состоит в одновременном подбрасывании 3 монет. Сколько раз нужно провести испытание, чтобы с вероятностью не менее 0.9 хотя бы раз появились три герба?

6. На научную конференцию пруглашены 100 человек, причем каждый из них прибывает с вероятностью 0.7. В гостинице для гостей забронировано 65 мест. Какова вероятность того, что всем приехавшим хватит мест в данной гостинице?

Решения варианта 1

1. Поскольку выбор производится без возвращения и порядок выбора шаров не важен, то общее число элементарных исходов $|\Omega| = C_{16}^6$. Обозначим интересующее нас событие A. Тогда его можно представить как объединение двух событий A_1 и A_2, где A_1 состоит в том, что какой-то цвет представлен 3 шарами, а остальные имеют по одному шару, A_2 — какие - либо два цвета представлены 2 шарами, а другие 2 цвета одним шаром. С помощью простых рассуждений получаем

$$\mathbf{P}(A_1) = \frac{C_4^1 C_4^3 (C_4^1)^3}{C_{16}^6}, \ \mathbf{P}(A_2) = \frac{C_4^2 (C_4^2)^2 (C_4^1)^2}{C_{16}^6}.$$

$$\mathbf{P}(A) = \mathbf{P}(A_1) + \mathbf{P}(A_2) = 0.1279 + 0.4316 = 0.5595.$$

Ответ: 0.5595.

2. Для решения этой задачи используем модель геометрических вероятностей. Множество элементарных исходов — это все точки круга радиуса r. Благоприятные исходы для события A — длина выбранной хорды больше стороны правильного треугольника, вписанного в окружность, — это точки круга, вписанного в данный треуголиник. Поэтому

$$\mathbf{P}(A) = \frac{S(A)}{S(\Omega)} = \frac{\pi r^2/4}{\pi r^2} = \frac{1}{4}.$$

Ответ: $\frac{1}{4}$.

3. Обозначим событие A — вынут выигрышный билет. Введем гипотезы:

   H_1 — потеряны 2 выигрышных билета, $\mathbf{P}(H_1) = \dfrac{C_2^2}{C_{15}^2} = \dfrac{1}{105}$;

   H_2 — потеряеы 1 выигрышный и 1 невыигрышный билеты, $\mathbf{P}(H_2) = \dfrac{C_2^1 C_{13}^1}{C_{15}^2} = \dfrac{26}{105}$;

   H_3 — потеряны 2 невыигрышных билета, $\mathbf{P}(H_3) = \dfrac{C_{13}^2}{C_{15}^2} = \dfrac{78}{105}$. Условные вероятности события по каждой из гипотез равны

   $$\mathbf{P}(A|H_1) = \frac{2}{15},\ \mathbf{P}(A|H_2) = \frac{3}{15},\ \mathbf{P}(A|H_3) = \frac{4}{15}.$$

   Тогда по формуле полной вероятности получим

   $$\mathbf{P}(A) = \frac{2}{15} \cdot \frac{1}{105} + \frac{3}{15} \cdot \frac{26}{105} + \frac{4}{15} \cdot \frac{78}{105} = 0.2489.$$

   Ответ: 0.2489.

4. Вычисления будут более простыми, если сначала найти вероятность события $\overline{B} = \overline{A_1 A_2} \cap \overline{A_3} \cap \overline{A_4 A_5}$, а именно

   $$\mathbf{P}(\overline{B}) = (1 - 0.09) \cdot 0.7 \cdot (1 - 0.09) = 0.57967.$$

   $$\mathbf{P}(B) = 1 - \mathbf{P}(\overline{B}) = 0.42033.$$

   Ответ: 0.42033.

5. Вероятность успеха (появления трех гербов) в каждом из испытаний равна $p = 1/8$, неуспеха — $q = 7/8$. Тогда вероятность события A — в n испытаниях хотя бы раз произойдет успех, равна $\mathbf{P}(A) = 1 - (7/8)^n$. Решив неравенство

   $$1 - \left(\frac{7}{8}\right)^n \geq 0.9,$$

   находим $n \geq 18$.

   Ответ: $n \geq 18$.

6. Обозначим μ_n — число приехавших участников. Необходимо вычислить $\mathbf{P}\{\mu_n \le 65\}$. Применив интегральную теорему Муавра-Лапласа с $n = 100,\ p = 0.7,\ q = 0.3$, получим

$$\mathbf{P}\{\mu_n \le 65\} \approx \int\limits_{-\infty}^{-1.09} \varphi(x)dx = 0.5 - \Phi_0(1.09) = 0.5 - 0.3621 = 0.14.$$

Ответ: 0.14.

Вариант 2

1. В трех студенческих группах 66 человек (по 22 в каждой, причем в каждой группе число девушек и юношей одинаково). Наудачу выбрали 5 человек. Какова вероятность того, что среди них окажутся девушки из всех групп?

2. Два теплохода должны подойти к причалу в течение фиксированных суток. Времена прихода теплоходов независимы. Найти вероятность того, что ни одному из них не придется ждать причала, если время стоянки одного из них составляет 1 час, а другого — 2 часа.

3. На отрезке $[0; 1]$ случайно выбирают точки X и Y. Найти вероятность того, что $X/Y \le 1/2$, но $X + Y \ge 1$.

4. Каждый прибор состоит из 3 комплектующих, вероятность брака для каждой из комплектующих равна p. Если хотя бы одна из них окажется бракованной, то весь прибор тоже оказывается бракованным. Найти вероятность того, что из 5 приборов бракованных будет не более одного.

5. Три стрелка производят по одному выстрелу. Вероятность попадания для первого равна 0.8, для второго — 0.7, для третьего — 0.9. Найти вероятность того, что хотя бы двое из них попадут в цель.

6. 0.08 Найти вероятность того, что в серии из 100 бросаний монеты числа орлов и решек совпадают.

Ответы

1. $\dfrac{3C_{11}^3(C_{11}^1)^2 + 3(C_{11}^2)^2C_{11}^1 + 3C_{11}^2(C_{11}^1)^2C_{33}^1 + (C_{11}^1)^3C_{33}^2}{C_{66}^5} = 0.1702.$

2. 0.879.

3. 1/12.

4. $((1-p)^3)^5 + C_5^1(1-(1-p)^3)((1-p)^3)^4$.

5. 0.902

6. 0.08.

Вариант 3

1. В каждой упаковке товаров имеется одна из 5 различных наклеек. Какова вероятность собрать их все, купив 7 упаковок?

2. Бросают три игральные кости. Какова вероятность того, что хотя бы на одной из них выпадет "6", если известно, что на костях выпали разные грани?

3. Изделие имеет скрытые дефекты с вероятностью 0.2. В течение года выходит из строя 75% изделий со скрытыми дефектами и 15% изделий без дефектов. Найти вероятность того, что изделие имело скрытые дефекты, если оно вышло из строя.

4. Сколько надо сделать выстрелов, что бы наивероятнейшее число попаданий в цель равнялось 15? Вероятность попадания при каждом выстреле равна 0.7.

5. Для лаборатории приобретено 9 приборов, причем вероятность брака для каждого прибора равна 0.1. Какова вероятность, что придется заменить более двух приборов?

6. По экспертной оценке доля населения некоторой социальной группы равна $p = 0.25$. Каков должен быть объем выборки, чтобы с вероятностью, не менее 0.99, погрешность в оценке p составляла не более 0.05?

Ответы

1. $\dfrac{C_5^1 C_7^3 4! + C_5^2 C_7^2 C_5^2 3!}{5^7} = 0.215$.

2. 0.5.

3. 0.56.

4. 21.
5. 0.053.
6. 496.

Глава 2

Случайные величины

2.1 Общее определение случайной величины

В этом разделе разберем определение случайной величины, понятие распределения случайной величины.

Определение 2.1. Случайной величиной, заданной на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$, называется функция, зависящая от элементарного исхода ω и принимающая действительные значения, для которой прообраз любого борелевского множества является событием из $\sigma-$алгебры $\mathcal{F}$.

Множество случайных величин, заданных на фиксированном вероятностном пространвнстве $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$, определяется $\sigma-$алгеброй $\mathcal{F}$.

Если $\sigma-$алгебра $\mathcal{F}$ содержит только два обязательных элемента: достоверное событие Ω и невозможное событие $\varnothing$, — то случаными величинами на таком вероятностном пространстве будут только функции $\xi(\omega) \equiv c$, принимающие для всех ω одно и то же значение c, то есть только константы. В этом случае прообразом борелевских множеств, содержащих c, явлеется достоверное событие, а прообразом всех остальных борелевских множеств при отображении ξ является невозможное событие.

Пусть теперь $\sigma-$алгебра $\mathcal{F}$ содержит четыре элемента: достоверное событие Ω, невозможное событие $\varnothing$, некоторое непустое событие A и его непустое дополнение $\overline{A}$. Тогда класс случайных величин, определенных на данном вероятностном пространстве расширится. Кроме констант в него войдут фукции от ω, принимающие два разлисных значения: $\xi(\omega) = c_1$, если $\omega \in A$ и $\xi(\omega) = c_2$, если $\omega \in \overline{A}$.

Чем богаче $\sigma-$алгебра подмножеств $\mathcal{F}$, тем большее число функций от элементарного исхода будут являться случайными величинами. При этом сумма, произведение и другие измеримые функции (в том числе непрерывные функции) от случайных величин будут являться случайными величинами.

Каждая случайная величина порождает на числовой прямой распределение вероятностей, которое задается функцией распределения данной случайной величины.

Определение 2.2. **Функцией распределения** случайной величины ξ называется функция $F_\xi(x)$ действительной переменной x, которая в каждой точке x определяется следующим образом:

$$F_\xi(x) = \mathbf{P}\{\omega : \xi(\omega) < x\}.$$

Рассмотрим следующий пример.

Пример 2.1. Вероятностное пространство $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ определяется следующим образом: множество элементарных исходов $\Omega = [0;1]$, $\sigma-$алгебра случайных событий $\mathcal{F}$— все борелевские множества на отрезке $[0;1]$, вероятность $\mathbf{P}$— мера Лебега, для которой $\mathbf{P}[a;b) = b-a$. В дальнейшем такое вероятностное пространство будем называть пространством Лебега на отрезке $[0;1]$. Зададим случайную величину $\xi(\omega)$:

$$\xi(\omega) = \begin{cases} \omega, & \text{если} \quad 0 \le \omega \le \frac{1}{2}, \\ -1, & \text{если} \quad \frac{1}{2} < \omega \le 1. \end{cases}$$

Функция распределения этой случайной величины равна

$$F_\xi(x) = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad x \le -1, \\ \frac{1}{2}, & \text{если} \quad -1 < x \le 0, \\ \frac{1}{2} + x, & \text{если} \quad 0 < x \le 1 \\ 1, & \text{если} \quad x > 1. \end{cases} \qquad \blacksquare$$

Для нее выполнены **основные свойства функций распределения:**

1. $0 \le F(x)_\xi \le 1$, $F_\xi(-\infty) = 0, \quad F_\xi(+\infty) = 1.$
2. Функция рнаспределения не убывает на всей числовой прямой.
3. Непрерывна слева, то есть для любой точки x_0 выполняется $\lim\limits_{x \to x_0+0} F_\xi(x) = F_\xi(x_0)$.
4. Число точек разрыва любой функции распределения не более чем счетно, при этом

$$F_\xi(x_0+0) - F_\xi(x_0) = \mathbf{P}\{\xi = x_0\}.$$

5. Для любых чисел $a < b$ справедливо равенство $F_\xi(b) - F_\xi(a) = \mathbf{P}\{a \le \xi < b\}$.

6. До минимального значения случайной величины ξ ее функция распределения равна нулю, а после максимального — единице.

Для понимания свойств функций распределения важное значение имеет теорема Лебега о представлении произвольной функции распределения в виде смеси функций рвспределения трех основных типов.

Теорема 2.1. *Функция распределения любой случайной величины может быть представлена в следующем виде:*

$$F(x) = \alpha_1 F_1(x) + \alpha_2 F_2(x) + \alpha_3 F_3(x),$$

где константы $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ *неотрицотельны и* $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 1$,
$F_1(x)$— *ступенчатая функция распределения,*
$F_2(x)$— *абсолютно непрерывная функция распределения,*
$F_3(x)$ — *сингулярная функция распределения.*

Так функция распределения из примера 2.1 представляется в виде смеси

$$F_\xi(x) = \frac{1}{2}F_1(x) + \frac{1}{2}F_2(x),$$

где

$$F_1(x) = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad x \le -1, \\ 1, & \text{если} \quad x > -1, \end{cases}$$

а

$$F_2(x) = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad x \le 0, \\ x, & \text{если} \quad 0 < x \le 1, \\ 1, & \text{если} \quad x > 1. \end{cases}$$

Дискретный и абсолютно непрерывный типы распределений будут подробно разобраны в следующих двух разделах.

2.2 Дискретные случайные величины

Дискретной случайной величиной будем называть случайную величину, принимающую конечное или счетное число различных значений.

Все различные значения случайной величины ξ, если их конечное число, и соответствующие этим значениям вероятности удобно задавать в виде таблицы

ξ	x_1	x_2	$\cdots$	x_n
	p_1	p_2	$\cdots$	p_n

Рис. 2.1: Функция распределения

которую называют таблицей распределения случайной величины ξ.

Обычно в этой таблице значения x_i, $i = 1, \ldots, n.$ упорядочены по возрастанию, а $p_i = \mathbf{P}\{\xi = x_i\}$, $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$.

Функция распределения такой случайной величины равна

$$F_\xi(x) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{I}_{\{x<x_i\}}(x).$$

(слагаемые в этой сумме — индикаторы соответствующих событий), а ее график, изображенный на рисунке 2.1, представляет собой неубывающую ступенчатую фукцию, точки разрыва которой x_i — указанные в таблице значения случайной величины, величина скачка в точке x_i равна p_i — вероятности соответствующего значения.

Важными числовыми характеристиками распределений являются математическое ожидание и дисперсия случайной величины.

Определение 2.3. Математическим ожиданием $\mathbf{E}\xi$ случайной величины ξ, распределение которой задано таблицей на стр.31, называется

$$\mathbf{E}\xi = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i.$$

Если ξ принимает счетное число значений $x_1, x_2 \ldots$ соответственно с вероятностями $p_1, p_2 \ldots$, то

$$\mathbf{E}\xi = \sum_{i=1}^{\infty} x_i p_i, \tag{2.1}$$

причем ряд в 2.1 должен сходиться абсолютно, чтобы данная числовая характеристика не зависила от способа нумерации значений. В противном случае говорят, что математическое ожидание не существует.

Перечислим основные свойства математических ожиданий.

1. $\mathbf{E}c = c$, где c— константа.

2. $\mathbf{E}(c\xi) = c\mathbf{E}\xi$.

3. $\mathbf{E}(\xi + \eta) = \mathbf{E}\xi + \mathbf{E}\eta$,— если случайные величины ξ и η имеют конечные математические ожидания, то их сумма также имеет конечное математическое ожидание, равное сумме математических ожиданий ξ и η.

4. Если $\xi \geq 0$, то $\mathbf{E}\xi \geq 0$, причем из равенства $\mathbf{E}\xi = 0$ в этом случае следует, что $\mathbf{P}\{\xi = 0\} = 1$.

5. Если $a \leq \xi \leq b$, то $a \leq \mathbf{E}\xi \leq b$.

6. Для независимых случайных величин с конечными математическими ожиданиями
$$\mathbf{E}(\xi\eta) = \mathbf{E}\xi \cdot \mathbf{E}\eta.$$

7. Для произвольной борелевской функции $g(x)$
$$\mathbf{E}g(\xi) = \sum_{i=1}^{\infty} g(x_i)p_i,$$
если ряд абсолютно сходится.

Определение 2.4. Диперсией случайной величины ξ называется
$$\mathbf{D}\xi = \mathbf{E}(\xi - \mathbf{E}\xi)^2.$$

С помощью приведенных выше свойств математического ожидания легко получить для вычисления дисперсии формулу
$$\mathbf{D}\xi = \mathbf{E}\xi^2 - (\mathbf{E}\xi)^2,$$
более удобную при решении задач.

Определение 2.5. Числовню характкристику $\sigma_\xi = \sqrt{\mathbf{D}\xi}$ называют стандартным отклонением случайной величины ξ.

Приведем также основные свойства дисперсии.

1. $\mathbf{D}\xi \geq 0$, причем $\mathbf{D}\xi = 0 \Leftrightarrow \mathbf{P}\{\xi = c\} = 1$, то есть ξ является константой.

Рис. 2.2: Пример 2.2

2. $\mathbf{D}(c\xi) = c^2 \cdot \xi$.

3. Для независимых случайных величин с конечными дисперсиями ξ, η $\mathbf{D}(\xi + \eta) = \mathbf{D}\xi + \mathbf{D}\eta$.

Рассмотрим теперь несколько примеров решения типовых задач.

Пример 2.2. Три различимых шара случайным образом размещаются по трем ячейкам, ξ – число пустых ячеек. Составить таблицу распределения ξ, построить график ее функции распределения, вычислить $\mathbf{E}\xi$, $\mathbf{D}\xi$.

Легко понять, что случайная величина ξ принимает значения $0, 1, 2$, при этом

$$\mathbf{P}\{\xi = 0\} = \frac{3!}{3^3} = \frac{2}{9},$$

$$\mathbf{P}\{\xi = 1\} = \frac{3 \cdot 2 \cdot C_3^2}{3^3} = \frac{6}{9},$$

$$\mathbf{P}\{\xi = 2\} = \frac{3}{3^3} = \frac{1}{9},$$

следовательно, таблица распределения имеет вид

ξ	0	1	2
	$\frac{2}{9}$	$\frac{6}{9}$	$\frac{1}{9}$

График функции распределения изображен на рисунке 2.2. Математическое ожидание данной случайной величины равно

$$\mathbf{E}\xi = 0 \cdot \frac{2}{9} + 1 \cdot \frac{6}{9} + 2 \cdot \frac{1}{9} = \frac{8}{9}.$$

Для вычисления дисперсии найдем сначала $\mathbf{E}\xi^2$, называемое вторым моментом ξ:

$$\mathbf{E}\xi^2 = 0^2 \cdot \frac{2}{9} + 1^2 \cdot \frac{6}{9} + 2^2 \cdot \frac{1}{9} = \frac{10}{9}.$$

$$\mathbf{D}\xi = \mathbf{E}\xi^2 - (\mathbf{E}\xi)^2 = \frac{10}{9} - \frac{64}{81} = \frac{4}{9}. \qquad \blacksquare$$

Пример 2.3. В коробке находятся 3 стандартные и 2 нестандартные детали. Мастер случайным образом отбирает детали до тех пор, пока не наберет 2 стандартные. Пусть ξ — число опробованных деталей. Составим таблицу распределения ξ и вычислим $\mathbf{E}\xi$, $\mathbf{D}\xi$. Она выглядит следующим образом

ξ	2	3	4
	0.3	0.4	0.3

Следовательно,

$$\mathbf{E}\xi = 2 \cdot 0.3 + 3 \cdot 0.4 + 4 \cdot 0.3 = 3,$$

$$\mathbf{E}\xi^2 = 4 \cdot 0.3 + 9 \cdot 0.4 + 16 \cdot 0.3 = 9.6,$$

$$\mathbf{D}\xi = 9.6 - 9 = 0.6. \qquad \blacksquare$$

Если число значений случайных величин велико, или даже их бесконечное число (но счетное!), то распределение можно задавать с помощью формул.

Пример 2.4. Рассмотрим случайную величину ξ, принимающую целые неотрицательные значения с вероятностями

$$\mathbf{P}\{\xi = k\} = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots$$

Такое распределение вероятностей называют распределением Пуассона с параметром λ, $\lambda > 0$. В дальнейшем данный факт будем обозначать $\xi \sim \Pi(\lambda)$. Вычислим математическое ожидание и дисперсию этой случайной величины.

$$\mathbf{E}\xi = \sum_{k=0}^{\infty} k \cdot \mathbf{P}\{\xi = k\} = \sum_{k=0}^{\infty} k \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} = e^{-\lambda} \cdot \lambda \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} =$$

$$= \lambda e^{-\lambda} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\lambda^i}{i!} = \lambda e^{-\lambda} \cdot e^{\lambda} = \lambda.$$

Вычислим теперь второй момент случайной величины:

$$\mathbf{E}\xi^2 = \sum_{k=0}^{\infty} k^2 \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} k(k-1) \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} + \sum_{k=0}^{\infty} k \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} =$$

$$= \lambda^2 e^{-\lambda} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\lambda^{k-2}}{(k-2)!} + \lambda = \lambda^2 + \lambda.$$

Следовательно,

$$\mathbf{D}\xi = \mathbf{E}\xi^2 - (\mathbf{E}\xi)^2 = \lambda^2 + \lambda - \lambda^2 = \lambda. \qquad \blacksquare$$

2.3 Непрерывные случайные величины

В этом разделе будут рассмотрены случайные величины, функции распределения которых абсолютно непрервыны.

Определение 2.6. Функция распределения $F_\xi(x)$ случайной величины ξ называется **абсолютно непрерывной,** если существует неотрицательная функция $p_\xi(x)$ называемая **плотностью распределения,** такая, что для всех x выполнено равенство

$$F_\xi(x) = \int_{-\infty}^{x} p_\xi(t)dt.$$

Из определения следует, что в тех точках, где функция распределения дифференцируема, плотность равна

$$p_\xi(x) = F'_\xi(x).$$

Отметим следующие свойства плотности распределения:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} p(t)dt = 1,$$

и

$$\mathbf{P}\{a \le \xi \le b\} = F_\xi(b) - F_\xi(a) = \int_{a}^{b} p_\xi(t)tdt.$$

Для абсолютно непрерывной случайной величины (далее просто непрерывной) математическое ожидание можно найти по формулам

$$\mathbf{E}\xi = \int_{-\infty}^{+\infty} x p_\xi(x)dx,$$

$$\mathbf{E}\xi^2 = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x^2 p_\xi(x)dx,$$

$$\mathbf{E}g(\xi) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} g(x)p_\xi(x)dx,$$

если интегралы сходятся абсолютно. В противном случае говорят, что математическое ожидание не существует.

Пример 2.5. Распределение случайной величины ξ задано плотностью распределения

$$p_\xi(x) = \begin{cases} cx^3, & 0 \le x \le 2, \\ 0, & x \notin [0,2]. \end{cases}$$

Найти константу c, функцию распределения $F_\xi(x)$, $\mathbf{P}\{1 \le \xi \le 1.5\}$. Вычислить $\mathbf{E}\xi, \mathbf{D}\xi$.

Заметим, во-первых, что константа $c > 0$. Ее можно найти из условия

$$\int\limits_0^\infty p_\xi(x)dx = 1.$$

Проведя несложные вычисления, получаем $c = 1/4$. Поскольку в любой точке x

$$F_\xi(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} p_\xi(x)dx,$$

то

$$F_\xi(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0, \\ \frac{x^4}{16}, & 0 < x \le 2, \\ 1, & x > 2. \end{cases}$$

Но тогда

$$\mathbf{P}\{1 \le \xi \le 1.5\} = F_\xi(1.5) - F_\xi(1) = \frac{65}{256} \approx 0.25.$$

Математическое ожидание равно

$$\mathbf{E}\xi = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} xp_\xi(x)dx = \int\limits_0^2 \frac{1}{4}x^4 dx = \frac{8}{5},$$

второй момент

$$\mathbf{E}\xi^2 = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x^2 p_\xi(x)dx = \int\limits_0^2 \frac{1}{4}x^5 dx = \frac{8}{3},$$

дисперсия

$$\mathbf{D}\xi = \mathbf{E}\xi^2 - (\mathbf{E}\xi)^2 = \frac{8}{3} - (\frac{8}{5})^2 = \frac{136}{75} \approx 1.81. \qquad \blacksquare$$

Пример 2.6. Вычислим математическое ожидание и дисперсию стандартного нормального распределения, которое задается плотностью

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

Предварительно заметим, что все моменты этого распределения конечны, и следовательно, моменты нечетного порядка равны нулю. В том числе $\mathbf{E}\xi = 0$, $\mathbf{D}\xi = \mathbf{E}\xi^2$.

$$\mathbf{E}\xi^2 = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = -\int\limits_{-\infty}^{+\infty} xd(e^{-\frac{x^2}{2}}) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = 1. \qquad \blacksquare$$

Моменты распределения случайной величины ξ можно найти с помощью производящей функции моментов.

Определение 2.7. Производящей функцией моментов случайной величины ξ называется функция $\psi(h)$ действительной переменной h, которая определяется как

$$\psi(h) = \mathbf{E}e^{h\xi}.$$

Область определения данной функции зависит от распределения, она может состоять из единственной точки $h = 0$ (например, для распределения Коши), представлять собой интервал (двустороннее показательное рапределение), совпадать с действительной прямой (нормальное распределение) и т.д.

Если производящая функция моментов случайной величины ξ определена в некоторой окрестности нуля, то моменты $\mathbf{E}\xi^k$ можно найти, разложив эту функцию в ряд Телора

$$\psi(h) = 1 + \mathbf{E}\xi \cdot h + \mathbf{E}\xi^2 \cdot \frac{h^2}{2!} + \cdots + \mathbf{E}\xi^k \cdot \frac{h^k}{k!} + \cdots . \qquad (2.2)$$

Пример 2.7. Вычислим с помощью производящей функции $\psi(h)$ моменты случайной величины ξ, имеющей стандартное нормальное распределение. Сначала найдем производящую функцию моментов:

$$\psi(\xi) = \mathbf{E}e^{h\xi} = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{hx}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}dx = e^{\frac{h^2}{2}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-h)^2}{2}}dx = e^{\frac{h^2}{2}}.$$

Разложим теперь производящую функцию моментов в ряд постепеням h, получим

$$\psi(h) = 1 + \frac{h^2}{2} + \frac{h^4}{4\cdot 2!} + \cdots + \frac{h^{2k}}{2^k\cdot k!} + \cdots .$$

Сравнивая это разложение с (2.4), получаем

$$\mathbf{E}\xi^{2n-1} = 0, \qquad \mathbf{E}\xi^{2n} = (2n-1)(2n-3)\cdot\ldots\cdot 1 = (2n-1)!!,\ n = 1, 2, 3, \ldots$$

В частности, получаем $\mathbf{E}\xi = 0$, $\mathbf{E}\xi^2 = 1$, $\mathbf{E}\xi^4 = 3$, $\mathbf{D}\xi = 1$. ■

Часто приходится находить распределение случайной величины $\eta = g(\xi)$, если известно распределение случайной величины ξ, а $g(x)$ — некоторая измеримая функция.

Пример 2.8. Пусть распределение ξ задано плотностью $p_\xi(x)$, а $\eta = c\xi + d$, $c \neq 0$. Найдем плотность распределения случайной величины η. Сначала рассмотрим случай $c > 0$. Функция распределения η равна

$$F_\eta(x) = \mathbf{P}\{\eta < x\} = \mathbf{P}\{c\xi + d < x\} = \mathbf{P}\left\{\xi < \frac{x-d}{c}\right\} = F_\xi\left(\frac{x-d}{c}\right).$$

В тех точках, где функция распределения дифференцируема, находим плотность распределения

$$p_\eta(x) = F'_\eta(x) = \frac{1}{c}p_\xi\left(\frac{x-d}{c}\right).$$

Если $c < 0$, то

$$F_\eta(x) = \mathbf{P}\{c\xi + d < x\} = \mathbf{P}\left\{\xi > \frac{x-d}{c}\right\} = 1 - F_\xi\left(\frac{x-d}{c}\right).$$

В этом случае плотность распределения равна

$$p_\eta(x) = -\frac{1}{c}p_\xi\left(\frac{x-d}{c}\right).$$

Объединяя полученные формулы в одну, окончательно имеем

$$p_\eta(x) = \frac{1}{|c|}p_\xi\left(\frac{x-d}{c}\right). \qquad ■$$

Применим полученную формулу для случайной величины ξ со стандартным нормальным распределением. Тогда линейное преобразование $\eta = c\xi + d$ имеет плотность

$$p_\eta(x) = \frac{1}{|c|} e^{-\frac{(x-d)^2}{2c^2}},$$

что соответствует нормальному распределению с математическим ожиданием $\mathbf{E}\eta = d$ и дисперсией $\mathbf{D}\eta = c^2$. Верно более общее утверждение

Теорема 2.2. *Если* $\xi \sim N(a; \sigma^2)$, *то* $\eta = c\xi + d \sim N(ca + d; c^2\sigma^2)$.

Пример 2.9. Пусть случайная величина ξ имеет равномерное распределение на отрезке $[-1; 1]$. Покажем, что $\eta = |\xi|$ равномерно распределена на $[0; 1]$.

Сначала отметим, что $\mathbf{P}\{0 \leq \eta \leq 1\} = 1$. Следовательно, $p_\eta(x) = 0$ при $|x| > 1$. Для $0 < x < 1$ сначала найдем функцию распределения случайной величины η :

$$F_\eta(x) = \mathbf{P}\{\eta < x\} = \mathbf{P}\{-x < \xi < x\} = F_\xi(x) - F_\xi(-x).$$

Продифференцировав функцию распределения, найдем

$$p_\eta(x) = F'_\eta(x) = F'_\xi(x) - F'_\xi(-x) = p_(x) + p_\xi(-x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1.$$

Видим, что данная плотность соответствует равномерному распределению на отрезке $[0; 1]$.[1] ■

Сформулируем теорему, позволяющую в некоторых случаях находить плотность распределения $\eta = g(\xi)$, не находя фукцию распределения.

Теорема 2.3. *Пусть случайная величина ξ имеет абсолютно непрерывное распределение с плотностью $p_\xi(x)$ и с вероятностью 1 принимает значения на некотором интервале E, функция $g(x)$ определена и дифференцируема на E, причем $g'(x) > 0$ на этом множестве. Тогда случайная величина $\eta = g(\xi)$ имеет абсолютно непрерывное распределение с плотностью,*

$$p_\eta(x) = (g^{-1}(x))' p_\xi(g^{-1}(x))$$

при $x \in g(E)$ и равной 0 в остальных случаях.

Утверждение теоремы можно переформулировать для случая, когда $g'(x) < 0$ на E :

$$p_\eta(x) = |(g^{-1}(x))'| p_\xi(g^{-1}(x)) \tag{2.3}$$

при $x \in g(E)$ и равной 0 в остальных случаях.

---

[1] В точках $x = \pm 1$ плотность доопределяем, например, равной 1.

2.4 Системы случайных величин

Если на одном вероятностном пространстве задано несколько случайных величин $\xi_1, \dots, \xi_n$, то рассмотривают совместное распределение этих случайных величин.

Определение 2.8. Совместной функцией распределения случайных величин $\xi_1, \dots, \xi_n$ называется функция действительных переменных $x_1, \dots, x_n$, определяемая в каждой точке как

$$F(x_1, \dots, x_n) = \mathbf{P}\{\xi_1 < x_1, \xi_2 < x_2, \dots \xi_n < x_n\}.$$

Зная совместную функцию распределения, можно найти функцию распределения $F_{\xi_i}(x)$ случайной величины ξ_i, $i = \overline{1, n}$), устремив остальные переменные $x_i \to +\infty$. Так

$$F_{\xi_1}(x_1) = F(x_1, +\infty, +\infty, \dots, +\infty),$$

$$F_{\xi_2}(x_2) = F(+\infty, x_2, +\infty, \dots, +\infty, \text{ и т.д.}$$

Определение 2.9. Случайные величины $\xi_1, \dots, \xi_n$ называются **независимы,** если для любых борелевских множеств $B_1, \dots, B_n$ на прямой выполняется равенство

$$\mathbf{P}\{\xi_1 \in B_1, \xi_2 \in B_2, \dots, \xi_n \in B_n\} = \prod_{i=1}^{n} \mathbf{P}\{\xi_i \in B_i\}.$$

Можно сформулировать критерий независимости случайных величин через функции распределения.

Теорема 2.4. *Случайные величины независимы тогда и только тогда, когда совместная функция распределения этих величин*

$$F(x_1, \dots, x_n) = \prod_{i=1}^{n} F_{\xi_i}(x_i)$$

во всех точках n–мерного пространства.

Важными числовыми характеристиками совместного распределения случайных величин являются ковариация и коэффициент корреляции.

Определение 2.10. Ковариацией двух случайных величин ξ и η называется

$$cov(\xi, \eta) = \mathbf{E}(\xi - \mathbf{E}\xi)(\eta - \mathbf{E}\eta).$$

Эта числовая характеристика обладает следующими свойствами:

1. $cov(\xi, \eta) = \mathbf{E}(\xi\eta) - \mathbf{E}\xi\mathbf{E}\eta$,
2. $cov(\xi, \eta) = cov(\eta, \xi)$,
3. $cov(\lambda\xi, \eta) = \lambda cov(\xi, \eta)$ для любой константы λ,
4. $|cov(\xi, \eta)| \leq \sqrt{\mathbf{D}\xi}\sqrt{\mathbf{D}\eta}$ — неравенство Коши–Буняковского, выполняющееся для всех случайных величин, имеющих конечные моменты второго порядка,
5. для независимых случайных величин ξ и η выполняется равенство $cov(\xi, \eta) = 0$.

Определение 2.11. Коэффициентом корреляции двух случайных величин ξ и η называется

$$\varrho(\xi, \eta) = \frac{cov(\xi, \eta)}{\sqrt{\mathbf{D}\xi}\sqrt{\mathbf{D}\eta}}.$$

Отметим важные свойства коэффициента корреляции.

1. $|\varrho| \leq 1$. Это свойство следует из неравенства Коши – Буняковского.
2. Коэффициент корреляции является безразмерной величиной, он не зависит от единиц масштаба, в которых измеряются случайные величины ξ и η.
3. Абсолютная величина коэффициента корреляции не меняется при линейных невырожденных преобразованиях случайных величин ξ и η.
4. Для независимых случайных величин ξ и η коэффициент корреляции равен 0. Однако равенство 0 коэффициента корреляции возможно и для зависимых случайных величин. В этом случае их называют некоррелированными.
5. Если $|\varrho| = 1$, то случайные величины ξ и η линейно связаны.

Приведем следующий результат, важный для понимания сути данной числовой характеристики.

Будем рассматриать случайные величины с конечными вторыми моментами и зададимся следующим вопросом: какая из линейнх функций $l(\xi) = k\xi + b$ минимизирует $\mathbf{E}(\eta - l(\xi))^2$, т.е. какая линейная фукция от ξ наилучшим образом приближает η ?

Ответ на этот вопрос известен, это

$$l^*(\xi) = \mathbf{E}\eta + \varrho(\xi,\eta)\frac{\sqrt{\mathbf{D}\eta}}{\sqrt{\mathbf{D}\xi}}(\xi - \mathbf{E}\xi),$$

при этом $\mathbf{E}(\eta - l^*(\xi))^2 = \mathbf{D}\eta(1 - \varrho^2(\xi,\eta))$.

Из-за своих свойств коэффициент корреляции называют мерой линейной связи.

Рассмотрим теперь подробно случаи дискретных и абсолютно непрерывных случайных величин.

2.4.1 Совместное распредеделение дискретных случайных величин

Пусть случайные величины ξ и η принимают конечное число значений, тогда их совместное распределение удобно задавать таблицей

(ξ,η)	η			
ξ	y_1	y_2	$\cdots$	y_m
x_1	p_{11}	p_{12}	$\cdots$	p_{1m}
x_2	p_{21}	p_{22}	$\cdots$	p_{2m}
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
x_n	p_{n1}	p_{n2}	$\cdots$	p_{nm}

в которой указаны все возможные, различные между собой значения $x_1,\dots,x_n$ случайной величины ξ и значения $y_1,\dots,y_m$ случайной величины η, а также совместные вероятности

$$p_{ij} = \mathbf{P}\{\xi = x_i, \eta = y_j\}.$$

По этой таблице легко находятся распределения как для ξ, так и для η. Так чтобы найти вероятность события $\{\xi = x_i\}$, надо сложить совместные вероятности в i– строке таблицы:

$$p_{i\bullet} = \mathbf{P}\{\xi = x_i\} = \sum_{j=1}^{m} p_{ij}\ .$$

Аналогично сложением совместных вероятностей по столбцу с номером j находятся вероятности

$$p_{\bullet j} = \mathbf{P}\{\eta = y_j\} = \sum_{i=1}^{n} p_{ij}\ .$$

Сформулируем критерий независимости для дискретных случайных величин и .

Теорема 2.5. *Случайные величины ξ и η независимы тогда только тогда, когда для всех зneчений этих случайных величин выполняются равенства*

$$\mathbf{P}\{\xi = x_i,\, \eta = y_j\} = \mathbf{P}\{\xi = x_i\} \cdot \mathbf{P}\{\eta = y_j\}. \tag{2.4}$$

Равенства (2.4) можно переписать, используя принятые нами обозначения:

$$p_{ij} = p_{i\bullet} \cdot p_{\bullet j},$$

которые должны выполняться для всех клеток таблицы совместного распределения.

По таблице совместного распределения можно вычислять математические ожидания любых случайных величин, являющихся функциями ξ и η по формуле

$$\mathbf{E}g(\xi,\eta) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} g(x_i, y_j)p_{ij}, \tag{2.5}$$

а также находить распределения новых случайных величин $\zeta = g(\xi,\eta)$.

Пример 2.10. Пусть распределение случайных величин задано таблицей

(ξ,η)	η		
ξ	-1	0	1
0	$1/4$	$3/8$	$1/8$
1	$1/12$	$1/8$	$1/24$

Вычислим $\mathbf{E}\xi\eta$ и найдем распределение $\zeta = \xi\eta^2$.

Для вычисления математического ожидания воспользуемся формулой (2.5), получим

$$\mathbf{E}\xi\eta = 0 \cdot \frac{1}{4} + 0 \cdot \frac{3}{8} + 0 \cdot \frac{1}{8} - 1 \cdot \frac{1}{12} + 0 \cdot \frac{1}{8} + 1 \cdot \frac{1}{24} = -\frac{1}{24}.$$

Из таблицы совместного распределения находим, что случайная величина ζ может принимать только значения 0 и 1, причем $\mathbf{P}\{\zeta = 1\} = 1/8$, а $\mathbf{P}\{\zeta = 0\} = 7/8$. Отметим также тот факт, что случайные величины ξ и η независимы. ■

Пример 2.11. Пусть игральная кость брошена дважды. Составим таблицу совместного распределения случайных величин ξ — результата бросания первой кости, η — максимального из двух выпавших чисел.

Учитывая, что всего 36 равновероятных исходов, подсчитаем вероятности событий $\{\xi = i, \eta = j\}$. Эти вероятности отличны от 0 при $i \le j$. Получаем следующую таблицу.

(ξ, η)	η					
ξ	1	2	3	4	5	6
1	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36
2	0	2/36	1/36	1/36	1/36	1/36
3	0	0	3/36	1/36	1/36	1/36
4	0	0	0	4/36	1/36	1/36
5	0	0	0	0	5/36	1/36
6	0	0	0	0	0	6/36

Найдем частные распределения и вычислим ковариацию случайных величин. Распределение ξ очевидным образом является равномерным на множестве натуральных чисел от 1 до 6

ξ	1	2	3	4	5	6
	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6

.

Вероятности для распределения η находим, сложив вероятности по столбцам в таблице совместного распределения. Получим

η	1	2	3	4	5	6
	1/36	3/36	5/36	7/36	9/36	11/36

.

По полученным таблицам находим

$$\mathbf{E}\xi = 1 \cdot \frac{1}{6} + 2 \cdot \frac{1}{6} + 3 \cdot \frac{1}{6} + 4 \cdot \frac{1}{6} + 5 \cdot \frac{1}{6} + 6 \cdot \frac{1}{6} = \frac{7}{2},$$

$$\mathbf{E}\eta = 1 \cdot \frac{1}{36} + 2 \cdot \frac{3}{36} + 3 \cdot \frac{5}{36} + 4 \cdot \frac{7}{36} + 5 \cdot \frac{9}{36} + 6 \cdot \frac{11}{36} = \frac{161}{36}.$$

Для вычисления ковариации найдем сначала $\mathbf{E}\xi\eta$ по формуле

$$\mathbf{E}\xi\eta = \sum_{i=1}^{6}\sum_{j=1}^{6} x_i y_j p_{ij}.$$

С помощью несложных вычислений получаем $\mathbf{E}\xi\eta = 105/36$. Тогда

$$cov(\xi, \eta) = \mathbf{E}\xi\eta - \mathbf{E}\xi\mathbf{E}\eta = \frac{105}{36} - \frac{7}{2} \cdot \frac{161}{36} = \frac{35}{24}. \qquad \blacksquare$$

Пример 2.12. Пусть ξ и η — независимые случайные величины, каждая из которых имеет распределение Пуассона, причем $\xi \sim \Pi(\lambda)$, $\eta \sim \Pi(\mu)$. Найдем распределение случайной величины $\zeta = \xi + \eta$.

Поскольку каждая из случайных величин ξ и η принимает целые неотрицательные значения, то ζ также может принимать только целые неотрицательные значения. Найдем вероятности этих значений, воспользовавшись независимостью случайных величин. Так

$$\mathbf{P}\{\zeta = 0\} = \mathbf{P}\{\xi = 0, \eta = 0\} = \mathbf{P}\{\xi = 0\} \cdot \mathbf{P}\{\eta = 0\} =$$

$$= \frac{\lambda^0 e^{-\lambda}}{0!} \frac{\mu^0 e^{-\mu}}{0!} = e^{-(\lambda+\mu)},$$

Аналогично прлучим

$$\mathbf{P}\{\zeta = 1\} = \mathbf{P}\{\xi = 1, \eta = 0\} + \mathbf{P}\{\xi = 0, \eta = 1\} =$$

$$= \frac{\lambda^1 e^{-\lambda}}{1!} \cdot \frac{\mu^0 e^{-\mu}}{0!} + \frac{\lambda^0 e^{-\lambda}}{0!} \cdot \frac{\mu^1 e^{-\mu}}{1!}.$$

Наконец, в общем случае получим

$$\mathbf{P}\{\zeta = n\} = \sum_{k=0}^{n} \mathbf{P}\{\xi = k, \eta = n-k\} = \sum_{k=0}^{n} \mathbf{P}\{\xi = k\}\mathbf{P}\{\eta = n-k\} =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} \cdot \frac{\mu^{n-k} e^{-\mu}}{(n-k)!} = \frac{e^{-(\lambda+\mu)}}{n!} \sum_{k=0}^{n} C_n^k \lambda^k \mu^{n-k} = \frac{e^{-(\lambda+\mu)}}{n!} (\lambda + \mu)^n.$$

Следовательно, сумма независимых случайных величин с распределением Пуассона также распределена по закону Пуассона с параметром, равным сумме параметров слагаемых. Это свойство справедливо при любом конечном числе независимых слагаемых. ■

Приведем один поучительный пример, показывающий, как можно вычислить математическое ожидание случайной величины, не находя ее распределение.

Пример 2.13. Пусть 20 перенумерованных шаров случайным образом размещаются по 10 ячейкам, случайная величина ξ — число ячеек, в которых оказалось ровно 2 шара. Вычислим $\mathbf{E}\xi$. Для этого представим случайную величину в следующем виде

$$\xi = X_1 + X_2 + \ldots + X_{10},$$

где каждая случайная величина $X_i\,(i = \overline{1, 10})$ принимает два значения: 1, если в i-ой ячейке оказалось два шара, и 0, если в ней любое другое число шаров. Тогда

$$\mathbf{P}\{X_i = 1\} = \frac{C_{20}^2 \cdot 9^{18}}{10^{20}}, \qquad \mathbf{P}\{X_i = 0\} = 1 - \mathbf{P}\{X_i = 1\}$$

оказываются не зависящими от номера ячейки i. Следовательно,

$$\mathbf{E}X_i = \frac{C_{20}^2 \cdot 9^{18}}{10^{20}}$$

также не зависит от номера i. Но тогда

$$\mathbf{E}\xi = \mathbf{E}X_1 + \ldots \mathbf{E}X_{10} = 10 \cdot \frac{C_{20}^2 \cdot 9^{18}}{10^{20}} \approx 2.85,$$

то есть в среднем 2—3 (чаще 3) ячейки содержат из 10 содержат два шара. ■

2.4.2 Совместное распредеделение непрерывных случайных величин

Определение 2.12. Совместное распределение случайных величин $\xi_1, \ldots, \xi_n$ будем называть **абсолютно непрерывным,** если существует неотрицательная функция $p(x_1, \ldots, x_n)$ такая, что для любого борелевского множества $B \subseteq \mathbb{R}^n$ выполняется равенство

$$\mathbf{P}\{(\xi_1, \ldots, \xi_n) \in B\} = \int\limits_{(x_1,\ldots,x_n)\in B} p(x_1, \ldots, x_n) dx_1 \ldots dx_n.$$

Функция в этом случае называется **плотностью совместного распределения.** Между совместной функцией распределения и совместной плотностью выполнены равенства

$$F(x_1, \ldots, x_n) = \int\limits_{-\infty}^{x_1} \ldots \int\limits_{-\infty}^{x_n} p(x_1, \ldots, x_n) dx_1 \cdots dx_n$$

в любой точке пространства и в тех точках, где совместная функуция распределения дифференцируема,[2]

$$p(x_1, \ldots, x_n) = \frac{\partial^n F(x_1, \ldots, x_n)}{\partial x_1 \cdots \partial x_n}.$$

По совместной плотности легко находятся плотности каждой ξ_i. Для этого нужно проинтегрировать совместную плотность по всем переменным, отличным от x_i. Так если $p_{\xi_1,\xi_2}(x_1, x_2)$ — плотность совместного распределения ξ_1 и ξ_2, то

$$p_{\xi_1}(x_1) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} p_{\xi_1,\xi_2}(x_1, x_2) dx_2$$

[2]имеется в виду, что существует соответствующая производная

Для абсолютно непрерывных случайных величин (в дальнейшем просто непрерывных) можно сформулировавать критерий независимости случайных величин, а именно: случайные величины $\xi_1, \ldots, \xi_n$ независимы тогда и только тогда, когда совместная плотность равна произведению частных плотностей почти всюду в $\mathbb{R}^n$.

Пример 2.14. Рассмотрим случайные величины ξ и η, равномерно распределенные на множестве $M = \{(x, y)|x^2+y^2 \leq 1\}$ координатной плоскости XOY. Совместная плотность этих случайных величин определяется следующим образом

$$p_{\xi,\eta}(x, y) = \begin{cases} \dfrac{1}{\pi}, & x^2 + y^2 \leq 1, \\ 0, & x^2 + y^2 > 1. \end{cases}$$

Найдем частные (маргинальные) плотности $p_\xi(x)$ и $p_\eta(y)$. Предварительно заметим, что в силу симметричности совместной плотности распределения по переменным x и y случайные величины ξ и η имеют одинаковые распределения, а также, что при $|x|, |y| > 1$ эти плотности равны 0. Для $|x| \leq 1$ получим

$$p_\xi(x) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} p_{\xi,\eta}(x, y)dy = \int\limits_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \frac{1}{\pi}dy = \frac{2\sqrt{1-x^2}}{\pi}.$$

Аналогично при $|y| \leq 1$ имеем

$$p_\eta(y) = \frac{2\sqrt{1-y^2}}{\pi}.$$

Поскольку произведение частных плотностей не равно совместной плотности, то случайные величины ξ и η не являются независимыми. ■

Пример 2.15. Рассмотрим двумерное нормальное распределение, когда совместная плотность случайных величин ξ и η имеет вид

$$p_{\xi,\eta}(x, y) = c{\cdot}\exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho)^2}\left(\frac{(x-a_1)^2}{\sigma_1^2} - 2\rho\frac{(x-a_1)}{\sigma_1}\cdot\frac{(y-a_2)}{\sigma_2} + \frac{(y-a_2)^2}{\sigma_2^2}\right)\right\},$$

где

$$c = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}.$$

Найдем частную плотность рапределения для случайной величины ξ, а именно

$$p_\xi(x) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} p_{\xi,\eta}(x,y)dy = c\exp\left\{-\frac{(x-a_1)^2}{2\sigma_1^2(1-\rho^2)}\right\}\times$$

$$\times\int\limits_{-\infty}^{\infty}\exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left(\frac{(y-a_2)}{\sigma_2}-\rho\frac{(x-a_1)}{\sigma_1}\right)^2\right\}\cdot\exp\left\{\frac{\rho^2(x-a_2)^2}{2\sigma_1^2(1-\rho^2)}\right\}dy =$$

$$= \frac{1}{\sigma_1\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{(x-a_1)^2}{2\sigma_1^2}\right)\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sigma_2\sqrt{2\pi(1-\rho^2)}}\exp\left\{-\frac{(y-a_2-\rho\frac{\sigma_2}{\sigma_1}(x-a_1))^2}{2\sigma_2^2(1-\varrho^2)}\right\}dy.$$

Поскольку подинтегральная функция в последнем интеграле есть плотность нормального распределения $N(a_2\rho\frac{\sigma_2}{\sigma_1}(x-a_1);\sigma_2^2(1-\rho^2)$, то интеграл равен 1, и окончательно получаем

$$p_\xi(x) = \frac{1}{\sigma_1\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{(x-a_1)^2}{2\sigma_1^2}\right),$$

то есть $\xi \sim N(a_1;\sigma_1^2)$. Аналогично показывается, что $\eta \sim N(a_2;\sigma_2^2)$.

Несложные, но достаточно громоздкие вычисления показывают, что параметр ρ — это коэффициент корреляции случайных величин ξ и η. Отсюда следует важное свойство двумерного нормального распределения: случайные величины ξ и η независимы тогда и только тогда, когда они некоррелированы (т.е. когда $\rho = 0$). ■

Зная совместное распределение ξ и η, можно находить распределения новых случайных величин, зависящих от ξ и η.

Пример 2.16. Пусть ξ и η независимы и имеют одинаковое показателоное распределение с параметром $a > 0$, то есть плотности этих случайных величин определяются формулами

$$p_\xi(x) = \begin{cases} ae^{-ax}, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0, \end{cases},$$

$$p_\eta(y) = \begin{cases} ae^{-ay}, & y \geq 0, \\ 0, & y < 0. \end{cases}$$

Следовательно, совместная плотность ξ и η отлична от 0 только в первой четверти координатной плоскости и в этом случае

$$p_{\xi,\eta}(x,y) = ae^{-ax}\cdot ae^{-ay}.$$

Рассмотрим новую случайную величину $\zeta = \dfrac{\xi}{\xi+\eta}$ и найдем плотность распределения ζ.

Прежде всего заметим, что с вероятностью 1 выполняется $\zeta \in [0;1]$. Следовательно, $p_\zeta(z) = 0$ при $z \notin [0;1]$. Рассмотрим теперь $z \in (0;1)$. Для таких z

$$F_\zeta(z) = \mathbf{P}\{\zeta < x\} = \mathbf{P}\left\{\eta > \frac{\xi(1-z)}{z}\right\} = \iint\limits_{y > x(1-z)/z} p_{\xi,\eta}(x,y)dxdy.$$

Перейдя от двойного интеграла к повторному, получим

$$F_\zeta(z) = \int\limits_0^\infty dx \int\limits_{x(1-z)/z} ae^{-ax}ae^{-ay}dy = \int\limits_0^\infty ae^{-ax/z} = z.$$

Продифференцировав по z, получим значение плотности на интервале $(0;1)$. Окончательно получаем

$$p_\zeta(z) = \begin{cases} 1, & x \in [0;1], \\ 0, & x \notin [0;1], \end{cases}$$

что соответствует равномерному распределению на отрезке $[0;1]$. ■

Способ решения предыдущего примера применим и в общем случае, когда по совместной плотности распределения ξ и η необходимо найти распределение случайной величины $\zeta = g(\xi,\eta)$. Приведем план решения.

1. Определение множества значений случайной величины ζ. Пусть это некоторое множество G на числовой прямой. В точках $z \notin G$ полагаем плотность $p_\zeta(z) = 0$.

2. Для $z \in G$ находим функцию распределения случайной величины, переходя к двойному интегралу от совместной плотности

$$F_\zeta(z) = \mathbf{P}\{g(\xi,\eta) < z\} = \iint\limits_{g(x,y)<z} p_{\xi,\eta}(x,y)dxdy.$$

3. В тех точках множества G, где найденная функция распределения дифференцируема, находим

$$p_\zeta(z) = F'_\zeta(z).$$

   В остальных точках (их общая мера Лебега равна 0) доопределяем плотность удобным способом.

Часто требуется найти распределение $\zeta = \xi + \eta$. Для этого можно воспользоваться **формулой свертки.** Приведем вариант этой формулы для независимых случайных величин ξ и η :

$$p_\zeta(z) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} p_\xi(z-x)p_\eta(x)dx$$

Рассмотрим пример на применение формулы свертки, хотя можно было действовать и ранее описанным способом.

Пример 2.17. Рассмотрим независимые случайные величины ξ и η, плотности распределения которых равны

$$p_\xi(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & x \in [0;2], \\ 0, & x \notin [0;2], \end{cases},$$

$$p_\eta(y) = \begin{cases} 1, & y \in [0;1], \\ 0, & y \notin [0;1]. \end{cases}$$

Пусть $\zeta = \xi + \eta$. Применим формулу свертки

$$p_\zeta(z) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} p_\xi(z-x)p_\eta(x)dx.$$

Чтобы правильно разобраться в пределах интегрирования, выпишем требования на аргументы плотностей, делающие их отличными от 0. Получим следующую систему неравенств

$$\begin{cases} z-x & \geq & 0, \\ z-x & \leq & 2, \\ x & \geq & 0, \\ x & \leq & 1, \end{cases} \iff \begin{cases} x \leq & \min\{z;1\}, \\ x \geq & \max\{0;z-2\}. \end{cases}$$

Видим, что пределы интегрирования зависят от z. Так при $0 \leq z \leq 1$ получим

$$p_\zeta(z) = \int\limits_0^z \frac{1}{2}dx = \frac{1}{2}z,$$

при $1 < z \leq 2$

$$p_\zeta(z) = \int\limits_0^1 \frac{1}{2}dx = \frac{1}{2},$$

при $2 < z \le 3$

$$p_\zeta(z) = \int\limits_{z-2}^{1} \frac{1}{2}dx = \frac{1}{2}(1 - z + 2) = \frac{3-z}{2},$$

при остальных z плотность равна 0. $\blacksquare$

2.5 Контрольные работы

Вариант 1

1. В урне находится 2 красных и 4 белых одинакового размера шаров. Наудачу без возвращения выбирают 3 шара. Пусть ξ — число красных шаров среди отобранных. Составить таблицу распределения ξ, построить график ее функции распределения, вычислить $\mathbf{E}\xi$, $\mathbf{D}\xi$.

2. Игральная кость брошена 10 раз. Пусть ξ— число выпавших единиц, η — число выпавших пятерок. Найти совместное распределение ξ и η. Вычислить ковариацию ξ и η.

3. Распределение случайной величины ξ задано плотностью распределения
$$p_\xi(x) = \begin{cases} c(1-|x|), & x \in [-1,1], \\ 0, & x \notin [-1,1]. \end{cases}$$
Найти константу c, функцию распределения $F_\xi(x)$. Вычислить $\mathbf{E}\xi, \mathbf{D}\xi$, $\mathbf{P}\{-0.25 \le \xi \le 0.5\}$.

4. Функция распределения случайной величины ξ равна $F_\xi(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\operatorname{arctg} x$. Найти плотность распределения случайной величины $\eta = \frac{1}{\xi}$. Вычислить $\mathbf{E}\eta, \mathbf{D}\eta$.

5. Две случайные величины ξ и η независимы и имеют стандартное нормальное распределение. Найти плотность распределения случайной величины $Z = |\xi - \eta|$. Вычислить $\mathbf{E}Z, \mathbf{D}Z$.

Решение варианта 1.

1. Из условия задачи следует, что случайная величина ξ может принимать значения 0,1,2. Найдем вероятности этих значений. Так
$$\mathbf{P}\{\xi = 0\} = \frac{C_4^3}{C_6^3} = \frac{4}{20} = \frac{1}{5},$$

$$\mathbf{P}\{\xi=1\}=\frac{C_2^1C_4^2}{C_6^3}=\frac{12}{20}=\frac{3}{5},$$

$$\mathbf{P}\{\xi=2\}=\frac{C_2^2C_4^1}{C_6^3}=\frac{4}{20}=\frac{1}{5}.$$

Таким образом,

$$F_\xi(x)=\begin{cases} 0, & \text{если} \quad x\le 0,\\ 1/5, & \text{если} \quad 0<x\le 1,\\ 4/5, & \text{если} \quad 1<x\le 2,\\ 1, & \quad x>2. \end{cases}$$

Найдем математическое ожидание $\mathbf{E}\xi=0\cdot\frac{1}{5}+1\cdot\frac{3}{5}+2\cdot\frac{1}{5}=1$, второй момент $\mathbf{E}\xi^2=1\cdot\frac{3}{5}+4\cdot\frac{1}{5}=\frac{7}{5}$, дисперсию $\mathbf{D}\xi=\mathbf{E}\xi^2-(\mathbf{E}\xi)^2=\frac{2}{5}=0.4$.

Ответ:

ξ	0	1	2
	1/5	3/5	1/5

$\mathbf{E}\xi=1, \mathbf{D}\xi=0.4$.

2. Поскольку число бросаний игральной кости равно 10, то значение суммы $\xi+\eta$ не првосходит 10, поэтому для $i,j\ge 0, i+j\le 10$ имеем

$$\mathbf{P}\{\xi=i,\eta=j\}=\frac{10!}{i!\,j!}\left(\frac{1}{6}\right)^i\left(\frac{1}{6}\right)^j\left(\frac{4}{6}\right)^{10-i-j}.$$

Такое распределение называется полиномиальным с параметрами $n=10$, $p_1=1/6$, $p_2=1/6$. При этом случайные величины ξ и η имеют одинаковое виномиальное распределение $B(n;p)$, где $n=10$, $p=1/6$. Для них $\mathbf{E}\xi=\mathbf{E}\eta=np=10/6=5/3$. Представим ξ и η в следующем виде

$$\xi=X_1+X_2+\ldots+X_{10},\qquad \eta=Y_1+Y_2+\ldots+Y_{10},$$

где случайные величины X_i, Y_j $(i,j=\overline{1;10}$ определим равенствами

$$X_i=\begin{cases} 1, & \text{если в } i\text{-ом испытании выпала 1},\\ 0, & \text{в остальных случаях}, \end{cases}$$

$$Y_j=\begin{cases} 1, & \text{если в } j\text{-ом испытании выпала 5},\\ 0, & \text{в остальных случаях}. \end{cases}$$

Вычислим $\mathbf{E}\xi\eta$ следующим образом

$$\mathbf{E}\xi\eta=\mathbf{E}\left(\sum_{i=0}^{10}X_i\sum_{j=0}^{10}Y_j\right)=\mathbf{E}\left(\sum_{i\ne j}X_iY_j+\sum_{i=1}^{10}X_iY_i\right)=$$

$$= \sum_{i \neq j} \mathbf{E} X_i \mathbf{E} Y_j = (10^2 - 10)\left(\frac{1}{6}\right)^2 = \left(\frac{5}{3}\right)^2 - \frac{5}{18}.$$

Окончательно для $cov(\xi, \eta)$ получим

$$cov(\xi, \eta) = \mathbf{E}\xi\eta - \mathbf{E}\xi\mathbf{E}\eta = \left(\frac{5}{3}\right)^2 - \frac{5}{18} - \left(\frac{5}{3}\right)^2 = -\frac{5}{18}.$$

Ответ: $\mathbf{P}\{\xi = i, \eta = j\} = \frac{10!}{i!\,j!}\left(\frac{1}{6}\right)^i\left(\frac{1}{6}\right)^j\left(\frac{4}{6}\right)^{10-i-j}$, $cov(\xi, \eta) = -5/18$.

3. Константу c найдем из условия

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} p_\xi(x)dx = 1.$$

Это означает, что площадь под плотностью должна равняться 1. Из этого условия получим $c = 1$.

Далее вычисляем функцию распределения, используя формулу

$$F_\xi(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} p_\xi(t)dt,$$

что означает, что в каждой точке x функция распределения равна площади под плотностью, находящейся слева от точки x. Получим

$$F_\xi(x) = \begin{cases} 0, & x \le -1, \\ \frac{(x+1)^2}{2}, & -1 < x \le 0, \\ 1 - \frac{(1-x)^2}{2}, & 0 < x \le 1, \\ 1, & x > 1. \end{cases}$$

Теперь мы можем найти вероятность попадания случаной величины в нужный интервал, а именно

$$\mathbf{P}\{-0.25 \le \xi \le 0.5\} = F_\xi(0.5) - f_\xi(-0.25) = 0.40625.$$

Проведем вычислени математического ожидания и дисперсии:

$$\mathbf{E}\xi = \int\limits_{-\infty}^{\infty} x p_\xi(x)dx = \int\limits_{-1}^{1} x(1 - |x|)dx = 0,$$

$$\mathbf{E}\xi^2 = \int\limits_{-\infty}^{\infty} x^2 p_\xi(x)dx = 2\int\limits_0^1 x^2(1-x)dx = \frac{1}{6},$$

$$\mathbf{D}\xi = \mathbf{E}\xi^2 - (\mathbf{E}\xi)^2 = \frac{1}{6}.$$

Ответ: $c = 1$, $\mathbf{P}\{-0.25 \le \xi \le 0.5\} = F_\xi(0.5) - f_\xi(-0.25) = 0.40625$, $\mathbf{E}\xi = 0$, $\mathbf{D}\xi = 1/6$.

4. Найдем сначала плотность распределения случайной величины ξ

$$p_\xi(x) = F'(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}.$$

Эта плотность отлична от 0 для всех , случайная величина η может принимать любые значения кроме 0. Кроме того замечаем, что преобразование случайных величин взаимно обратно, поэтому можно применить формулу (2.3), получим

$$p_\eta(x) = \frac{1}{x^2}\frac{1}{\pi(1+1/x^2)} = \frac{1}{\pi(1+x^2)},$$

что снова соответствует распределению Коши. Для этого распределения математическое ожидание и дисперсия не существуют.

Ответ: $p_\eta(x) = \frac{1}{x^2}\frac{1}{\pi(1+1/x^2)} = \frac{1}{\pi(1+x^2)}$, математическое ожидание и дисперсия не существуют.

5. Заметим сначала, что случайная величина Z с вероятностью 1 неотрицательна, тем самым ее плотность $p_Z(z) = 0$ при $z < 0$. При $z > 0$ получим $F_Z(z) = \mathbf{P}\{Z < x\} = \mathbf{P}\{-z < \xi - \eta < z\}$. Поскольку случайная величина $\zeta = \xi - \eta$ имеет нормальное распределение с математическим ожидонием $a = 0$, и дисперсией $\sigma^2 = 2$, то

$$F_Z(z) = \int\limits_{-z}^{z} \frac{1}{2\sqrt{\pi}} e^{-\frac{x^2}{4}} dx = 2\int\limits_0^z \frac{1}{2\sqrt{\pi}} e^{-\frac{x^2}{4}} dx.$$

Следовательно,

$$p_Z(z) = F_Z'(z) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-\frac{z^2}{4}}.$$

Математическое ожидание равно

$$\mathbf{E}Z = \int\limits_0^{+\infty} z\frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-\frac{z^2}{4}} dz = -\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^{+\infty} d(e^{-\frac{z^2}{4}}) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}.$$

Для вычисления дисперсии найдем сначала второй момент случайной величины Z:

$$\mathbf{E}Z^2 = \mathbf{E}(\zeta^2) = \mathbf{D}\zeta = 2.$$

$$\mathbf{D}Z = \ Z^2 - (\mathbf{E}Z)^2 = 2 - \frac{4}{\pi}.$$

Ответ: $p_Z(z) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-\frac{z^2}{4}}$ при $z \geq 0$ и равна 0 при $z < 0$, $\mathbf{E}Z = \frac{2}{\sqrt{\pi}}$, $\mathbf{D}Z = 2 - \frac{4}{\pi}$.

Вариант 2

1. В урне находится 2 красных и 3 белых одинакового размера шаров. Поочередно с возвращением выбирают 3 шара. Пусть ξ — число красных шаров среди отобранных. Составить таблицу распределения ξ, построить график ее функции распределения, вычислить $\mathbf{E}\xi$, $\mathbf{D}\xi$.

2. Пять неразличимых шаров случайным образом размещаются по четырем ячейкам. Найти совместное распределение случайных величин ξ и η, где ξ — число пустых ячеек, а η — число ячеек, в которых находится 2 шара.

3. Распределение случайной величины задано плотностью распределения
$$p_\xi(x) = \begin{cases} cx^3, & 0 \leq x \leq 2, \\ 0, & x \notin [0,2]. \end{cases}$$
Найти константу c, функцию распределения $F_\xi(x)$, $\mathbf{P}\{1 \leq \xi \leq 1.5\}$.

4. Найти плотность распределения случайной величины $\eta = (\xi - 1)^2$, вычислить $\mathbf{E}\eta, \mathbf{D}\eta$. (Случайная величина ξ определена в предыдущей задаче.)

5. Случайная величина ξ имеет равномерное распределение на $[0;1]$, а η распределена по показательному закону с параметром, равным 1. Найти плотность рапределения $Z = \xi + \eta$, если ξ и η независимы. Вычислить $\mathbf{E}Z$, $\mathbf{D}Z$.

Ответы:

1.

ξ	0	1	2	3
	27/125	54/125	36/125	8/125

, $\mathbf{E}\xi = 6/5$, $\mathbf{D}\xi = 18/25$.

2. Таблица совместного распределения:

(ξ,η)	η		
ξ	0	1	2
0	0	1/14	0
1	3/14	0	3/14
2	3/14	3/14	0
3	1/14	0	0

$cov(\xi,\eta) = -3/14.$

3. $c = 1/4, F_\xi(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0, \\ x^4/16, & 0 < x \le 2, \\ 1, & x > 2, \end{cases}$ $\mathbf{P}\{1 \le \xi \le 1.5\} = 65/256.$

4. $p_\eta(x) = \dfrac{1+3x}{4\sqrt{x}}$, если $x \in (0;1]$ и равна 0 при остальных x;
$\mathbf{E}\eta = 7/15$; $\mathbf{D}\eta = 304/3150$.

5. $p_Z(z) = \begin{cases} 0, & z < 0, \\ 1 - e^{-z}, & 0 \le z \le 1, \\ e^{-z}(e-1), & z > 1; \end{cases}$ $\mathbf{E}Z = 3/2$, $\mathbf{D}Z = 13/12$.

Вариант 3

1. Игральную кость бросают до тех пор, пока не выпадет число, кратное 3, но не более пяти раз. Составить таблицу распределения ξ, построить график ее функции распределения, вычислить $\mathbf{E}\xi$, $\mathbf{D}\xi$.

2. Петя и Ваня бросают монету по 10 раз. Пусть ξ— число выпавших гербов у Пети, а η — число гербов, выпавших у Вани. Найти вероятность того, что $\xi > \eta$.

3. Плотность распределения случайной величины ξ определена с точностью до постоянного множителя и равна

$$p_\xi(x) = ce^{-\frac{(x+1)^2}{8}}.$$

Найти константу c, функцию распределения $F_\xi(x)$,
$\mathbf{P}\{-3 \le \xi \le 2\}$, $\mathbf{E}\xi$, $\mathbf{D}\xi$.

4. Для случайной величины ξ предыдущей задачи найти плотность распределения случайной величины $\eta = e^\xi$. вычислить $\mathbf{E}\eta, \mathbf{D}\eta$.

5. Случайные величины ξ и η независимы, имеют одинаковое стандартное нормальное распределение. Найти плотность распределения случайной величины $\zeta = \sqrt{\xi^2 + \eta^2}$, вычислить $\mathbf{E}\zeta$, $\mathbf{D}\zeta$.

6. Случайные величины ξ и η имеют совместное равномерное распределение на множестве $M = \{(x, y) | |x| + |y| \le 2\}$ координатной плоскости XOY. Найти частные плотности, $\mathbf{P}\{3\eta > \xi + 2\}$.

Ответы:

1.

ξ	1	2	3	4	5
	1/3	2/9	4/27	8/81	16/81

, $\mathbf{E}\xi = 211/81$, $\mathbf{D}\xi = 15014/6561$.

2. $\mathbf{P}\{\xi > \eta\} = \dfrac{1}{2}\left(1 - \mathbf{P}\{\xi = \eta\}\right) = \dfrac{1}{2}\left(1 - \dfrac{C_{20}^{10}}{2^{20}}\right)$.

3. $c = 1/(2\sqrt{2\pi})$; $F_\xi(x) = \Phi(\frac{x+1}{2})$, где $\Phi(x)$— функция распределения стандартного нормального распределения. $\mathbf{P}\{-3 \le \xi \le 2\} = 0.7745$, $\mathbf{E}\xi = -1$, $\mathbf{D}\xi = 4$.

4. $p_\eta(x) = \dfrac{1}{2x\sqrt{2\pi}} \exp\{-\dfrac{(\ln x - a)^2}{2\sigma^2}\}$,
$\mathbf{E}\eta = e^{2a+\sigma^2/2}$, $\mathbf{D}\eta = e^{2a}(e^{2\sigma^2} - e^{\sigma^2})$.

5. $p_\zeta(z) = ze^{-z}$, если $z \ge 0$ и равна 0 при $z < 0$, $\mathbf{E}\zeta = 2$, $\mathbf{D}\zeta = 2$.

6. $p_\xi(x) = p_\eta(x) = (2 - |x|)/4$ при $|x| \le 2$ и равна 0 при остальных x,
$\mathbf{P}\{3\eta > \xi + 2\} = 1/4$.

Литература

[1] В. Феллер. Введение в теорию вероятностей и ее приложения. В 2-х томах. Мир,1984.

[2] Ю.В.Прохоров, Л.С.Пономаренко. Лекции по теории вероятностей и математической статистике.М.: Издательство Московского университета, 2012.

[3] Ф.М.Зубков, Б.А.Севастьянов, В.П.Чистяков. Сборник задач по теории вероятностей

[4] Большев Л. Н., Смирнов Н. В. Таблицы математической статистики. — М.: Наука, 1983.

99